REA3022 2014 Høst

Eksamenstid:
5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:
Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:
Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.

Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Andre opplysninger:
Kilder for bilder, tegninger osv.:

- Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng) Nettkode: E-4CYB

Deriver funksjonene

a)

$f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 5$

Løsningsforslag a)

$f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 5$
$f'(x) = 5 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 0$
$f'(x) = 15x^2 - 4x$

Svar: $\underline{\underline{f'(x) = 15x^2 - 4x}}$

b)

$g(x) = x^2 \cdot e^x$

Løsningsforslag b)

$g(x) = x^2 \cdot e^x$
$g'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$
$g'(x) = x \cdot e^x(x+2)$

Svar: $\underline{\underline{g'(x) = x \cdot e^x(x+2)}}$

Oppgave 2 (4 poeng) Nettkode: E-4CYE

Polynomfunksjonen P er gitt ved

$$P(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8 \;, \quad D_P = \mathbb{R}$$

a)

Faktoriser $P(x)$ i førstegradsfaktorer.

Løsningsforslag a)

Vi forsøker å finne en rot i $P(x)$ ved å sette inn lave heltall. $(0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$
Vi begynner med 1. $P(1) = 1 + 1 - 10 + 8 = 0$ så x=1 er et nullpunkt. Det betyr at $(x-1)$ er en faktor i $P(x)$. Vi utfører polynomdivisjonen $\left(x^3 + x^2 - 10x\right) : (x-1)$

$$\begin{array}{l}
\left(\;\; x^3 + x^2 - 10x + 8\right) : \left(x - 1\right) = x^2 + 2x - 8 \\
\underline{-\,x^3 + x^2} \\
\qquad\quad 2x^2 - 10x \\
\qquad\; \underline{-\,2x^2 + 2x} \\
\qquad\qquad\quad -\,8x + 8 \\
\qquad\qquad\quad\;\; \underline{8x - 8} \\
\qquad\qquad\qquad\quad\; 0
\end{array}$$

Vi bruker nå abc-formelen $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ på $x^2 + 2x - 8$ for å skrive det som $x^2 + 2x - 8 = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2}$$

Dette gir oss:

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

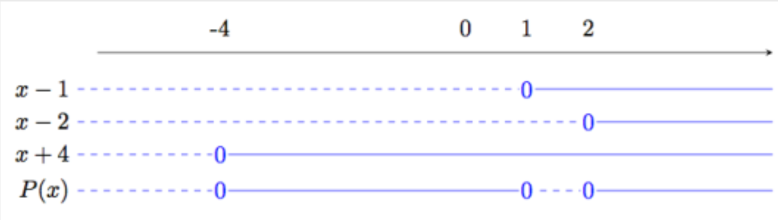
Derfor er $x^2 + 2x - 8 = \left(x - 2\right)\left(x + 4\right)$.

Svar: $\underline{\underline{P(x) = (x+4)(x-2)(x-1)}}$

b)

Løs ulikheten $P(x) \leq 0$.

Løsningsforslag b)



Svar: $\underline{\underline{P(x) \leq 0 \text{ når } x \in \langle \leftarrow, -4] \cup [1, 2]}}$

Oppgave 3 (4 poeng) Nettkode: E-4CYH

Sammenhengen mellom lydstyrken L db (desibel) og lydintensiteten I W/m^2 er gitt ved

$L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$

$I_0 = 10^{-12}$ er en konstant.

a)
Vis at formelen kan skrives som

$L = 10 \cdot \lg I + 120$

Løsningsforslag a)

Vi bruker at $\lg \frac{I}{I_0} = \lg I - \lg I_0$

$L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0} = 10 \cdot (\lg I - \lg I_0)$

$L = 10 \lg I - 10 \lg \left(10^{-12}\right)$

Vi vet at $\lg a^b = b \cdot \lg a$. Vi kan derfor skrive om $\lg 10^{-12} = -12 \lg 10$. Vi vet også at $\lg 10 = 1$ så vi får $-12 \lg 10 = -12$.

$L = 10 \lg I - 10(-12)$

$L = 10 \lg I + 120$

Svar: Vi har da vist at formelen kan skrives som $L = 10 \lg I + 120$

b)
På en arbeidsplass blir lydintensiteten målt til 10^{-4} W/m^2.

Hvor mange desibel er lydstyrken på arbeidsplassen?

Løsningsforslag b)

$L = 10 \lg \left(10^{-4}\right) + 120$

$L = 10 \cdot (-4) \lg 10 + 120$

$L = -40 + 120 = 80$

Svar: 80 dB

c)

På en klassefest blir lydstyrken målt til 100 dB.

Hvilken lydintensitet svarer det til?

Løsningsforslag c)

$L = 100 = 10\lg I + 120$

$10\lg I = -20$

$\lg I = -2$

$I = 10^{-2}$

Svar: En lydstyrke på 100 dB svarer til en lydintensitet på 10^{-2} W/m^2.

Oppgave 4 (4 poeng) Nettkode: E-4CYL

Funksjonen f er gitt ved

$$f\,(x) = \frac{2x-4}{x-1}\,, \quad D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$$

a)

Lag en skisse av grafen til f.

Løsningsforslag a)

Vi viser hvordan vi finner en horisontal asymptote i den positive retningen:

$$\lim_{x\to\infty} f\,(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-4}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x}-\frac{4}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{2}{1} = 2$$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right) = 2$, så vi får en horisontal asymptote i begge retninger. For den vertikale asymptoten i $x = 1$ sjekker vi kort hvordan f oppfører seg på hver side av asymptoten.

$$lim_{x\to 1^-} f\left(x\right) = \lim_{x\to 1^-} \frac{-2}{(x-1)}$$

$x - 1 < 0$ når $x \to 1^-$, så uttrykket blir positivt.

$$lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty$$

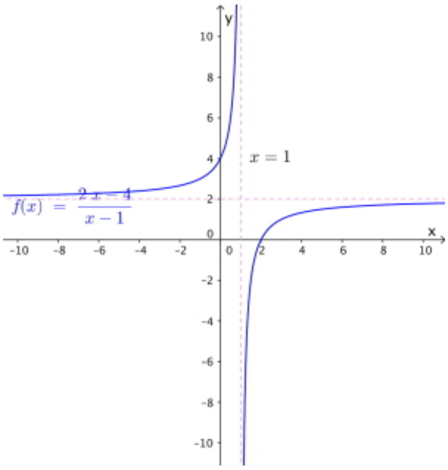
$$\lim_{x\to 1^+} f\left(x\right) = \lim_{x\to 1^+} \frac{-2}{x-1}$$

$x - 1 > 0$ når $x \to 1^+$, så uttrykket blir negativt.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$$

For å kunne skissere, finner vi noen punkter som for eksempel skjæringspunkter med aksene, altså når $x = 0$ og $y = 0$. For å finne skjæringspunkt med y - aksen, finner vi først ut: $f\left(0\right) = \frac{2\cdot 0-4}{0-1} = \frac{-4}{-1} = 4$. Punktet er$(0,4)$. For å finne skjæringspunkt med x - aksen, løser vi $f(x) = 0$ og dette skjer når teller er lik null, altså når $2x - 4 = 0$ eller når $x = 2$. Dette skjæringspunktet er $(2,0)$.

Svar:



b)

Bestem $f'(x)$.

Løsningsforslag b)

$$f'\left(x\right) = \frac{2(x-1)-(2x-4)}{(x-1)^2}$$

$$f'\left(x\right) = \frac{2x-2-2x+4}{(x-1)^2}$$

$$f'\left(x\right) = \frac{2}{(x-1)^2}$$

Svar: $f'\left(x\right) = \frac{2}{(x-1)^2}$

c)

Bestem likningen til tangenten i punktet $(2, 0)$ på grafen.

Løsningsforslag c)

$f'\left(2\right) = \frac{2}{(2-1)^2} = 2$
$y = 2x + b$

Vi bruker at linjen går gjennom $(2, 0)$, så når $x = 2$ er $y = 0$.

$0 = 2 \cdot 2 + b$
$b = -4$

Svar: Tangenten har ligning $y = 2x - 4$

Oppgave 5 (2 poeng) Nettkode: E-4CYP

a)

Forklar at $\vec{v} = [1, a]$ er en retningsvektor til linjen $y = ax + b$

Løsningsforslag a)

Svar: Først finner vi to punkter på linja $y = ax + b$. Siden konstantleddet er b, er $P = (0, b)$ et punkt på linja. Med $x = 1$, blir $y = a + b$, så punktet $Q = (1, a + b)$ ligger også på linja. En retningsvektor for linja er dermed

$$\underline{\underline{\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = [1 - 0, a + b - b] = [1, a]}}$$

b)

To linjer er gitt ved likningene $y = a_1 \cdot x + b_1$ og $y = a_2 \cdot x + b_2$

Bruk skalarprodukt til å vise at dersom linjene står vinkelrett på hverandre, er $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Løsningsforslag b)

Svar:

Linjene har retningsvektorer $[1, a_1]$ og $[1, a_2]$. Om to vektorer står vinkelrett på hverandre er skalarproduktet null. Det vil si $[1, a_1] \perp [1, a_2]$ medfører at

$$[1, a_1] \cdot [1, a_2] = 0$$
$$1 + a_1 \cdot a_2 = 0$$

$$\underline{\underline{a_1 \cdot a_2 = -1}}$$

Oppgave 6 (2 poeng) Nettkode: E-4CYS

Løs likningen

$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-x} = \frac{3}{8}$

Løsningsforslag

Vi begynner med å multiplisere begge sider av likningen med $\frac{3}{2}$. Vi får da

$\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-x} = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{2}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-x} = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$

Nå har vi samme basetall på begge sider av likningen. Likningen er da riktig bare hvis eksponentene er like store. Vi leter altså etter de x-verdiene slik at $x^2 - x = 2$.

$x^2 - x - 2 = 0$ kan vi løse med abc-formelen.

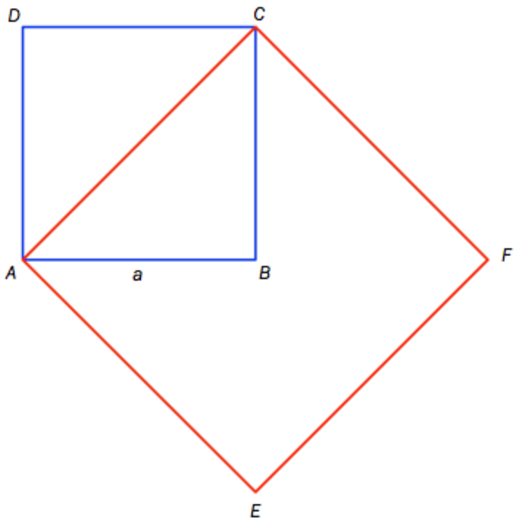
$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$

Svar: Likningen har to løsninger, $x = 2$ og $x = -1$

Oppgave 7 (4 poeng) Nettkode: E-4CYV

På figuren nedenfor har vi tegnet kvadratene $ABCD$ og $AEFC$.

Vi setter siden i kvadratet $ABCD$ lik a.

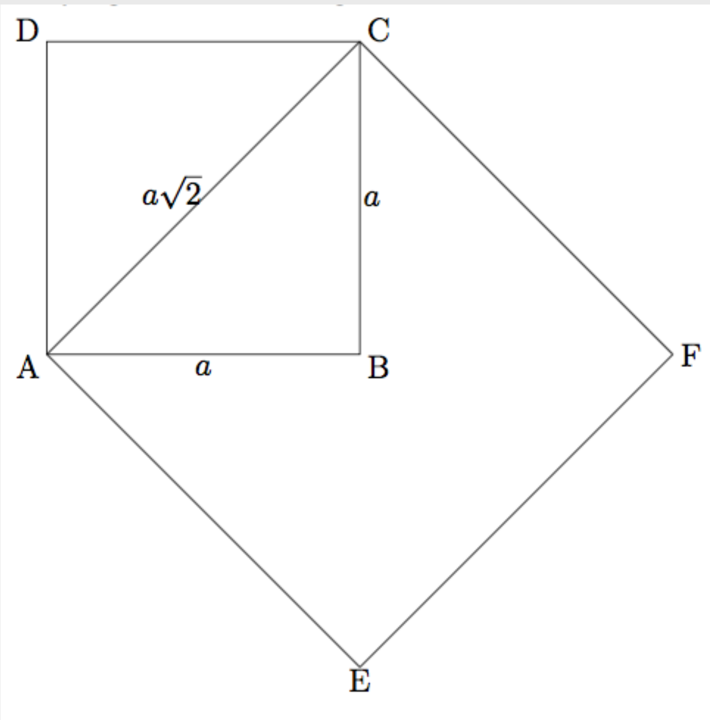


a)

Vis at kvadratet AEFC har dobbelt så stort areal som kvadratet ABCD.

Løsningsforslag a)

Siden $\square ABCD$ er et kvadrat er $AB = BC = a$. Vi kan regne ut lengden AC med Pytagoras læresetning. $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$



Vi vet at $\square AEFC$ er et kvadrat, så $AC = AE = EF = FC = a\sqrt{2}$. Vi vet nå alt vi trenger for å regne ut arealene.

$A_{\square ABCD} = a^2$

$A_{\square AEFC} = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2$

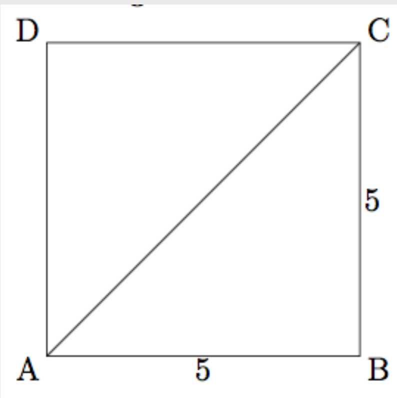
Altså er $A_{\square AEFC} = 2 \cdot A_{\square ABCD}$

Svar: $\underline{\underline{A_{\square AEFC} = 2 \cdot A_{\square ABCD}}}$

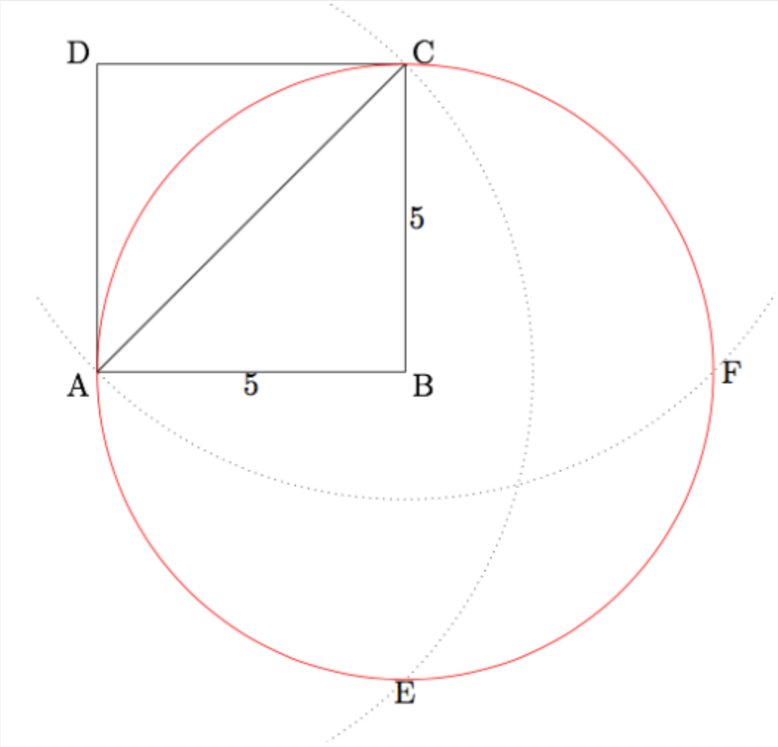
b)
Konstruer et kvadrat med areal eksakt lik 50 cm^2 .

Løsningsforslag b)

Vi konstruerer et kvadrat med sider på 5cm, og trekker den ene diagonalen i kvadratet.



Vi kan herfra for eksempel forlenge linjen AB og BC til å strekke seg 5cm lengre, og fullføre kvadratet. Skulle man mangle linjal kan det fortsatt gjøres, ved å trekke opp sirkler fra A og fra C med lengde $|AC|$. Deretter kan vi trekke en sirkel fra B med lengde AB. Der sirkelen fra B skjærer de andre sirklene er hjørnene i det store kvadratet. (se figuren under)



Det finnes nok mange veier til målet her. Alle er like gode om arealet av kvadratet blir $50\ \text{cm}^2$.

Oppgave 8 (2 poeng) Nettkode: E-4CYY

Funksjonen f er gitt ved

$f(x) = x^3 - x \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$

Bruk definisjonen av den deriverte til å vise at $f'(x) = 3x^2 - 1$

Løsningsforslag

Definisjonen av den deriverte sier at $f'\left(x\right) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$

Setter vi inn $x^3 - x$ for $f(x)$ i definisjonen får vi

$$f'\left(x\right) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(x+\triangle x)^3-(x+\triangle x)-(x^3-x)}{\triangle x}$$

$$f'\left(x\right) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{x^3+3x^2\triangle x+3x(\triangle x)^2+(\triangle x)^3-x-\triangle x-x^3+x}{\triangle x}$$

Vi ser at de to leddene med x^3 slår hverandre ut. Når alle leddene i telleren inneholder $\triangle x$ utfører vi divisjonen.

$$f'\left(x\right) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{3x^2\triangle x+3x(\triangle x)^2+(\triangle x)^3-\triangle x}{\triangle x}$$

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \left(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 - 1\right) = 3x^2 - 1$$

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng) Nettkode: E-4CZ0

Ved en bestemt kjemisk reaksjon vil konsentrasjonen av et stoff være gitt ved

$f(t) = 2{,}50 - 2{,}50 \cdot e^{-0{,}012 \cdot t}$

der $f(t)$ er antall millimol per liter av stoffet, t sekunder etter at reaksjonen startet.

a)

Hva er konsentrasjonen etter 15 s?

Hvor lang tid tar det før konsentrasjonen er 2,00 millimol/L?

Løsningsforslag a)

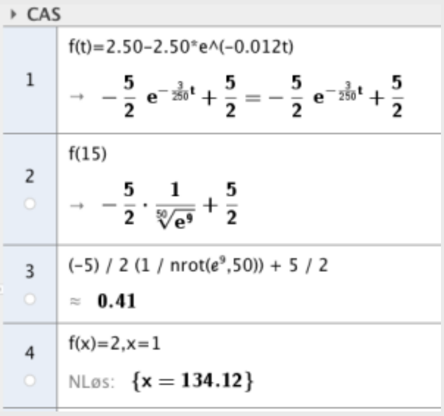
Vi skriver inn funksjonen i GeoGebra,

$f(t) = 2{,}50 - 2{,}50 \cdot e^{-0{,}012 \cdot t}$

og ber CAS løse $f(15)$ og får at $f\left(15\right) = -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[10]{e^9}} + \frac{5}{2} \approx 0,41$

For å finne ut når konsentrasjonen er 2,00 millimol/L løser vi $f(x) = 2,00$ i CAS.

Vi får svaret at $f(x) = 2,00$ når $x = \frac{250}{3}$ ln$(5) \approx 134,12$

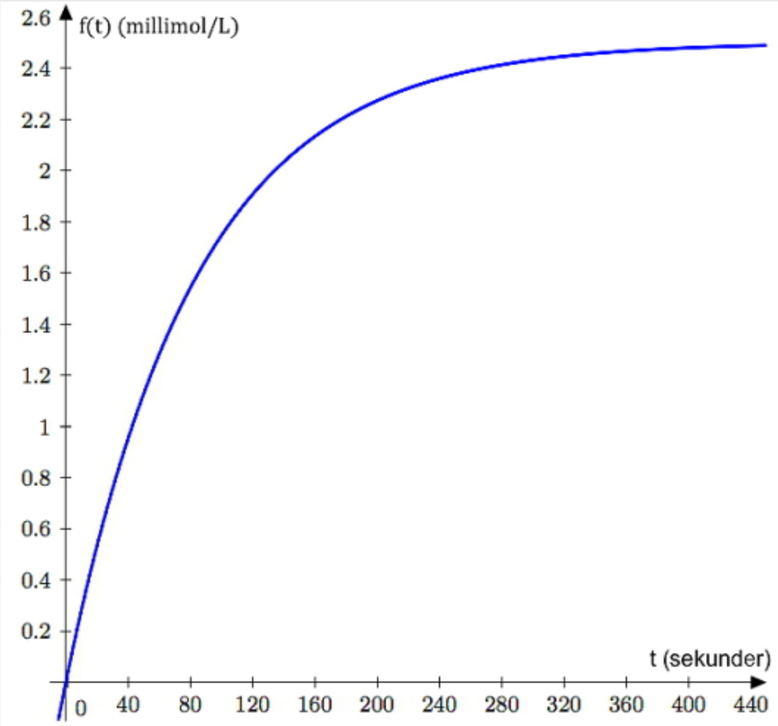


Svar: Etter 15 s er konsentrasjonen $\approx 0,41$ millimol/L. Det tar $134{,}12$ s før konsentrasjonen er $2,00$.

b)
Tegn grafen til f.

Hva vil konsentrasjonen nærme seg dersom den kjemiske reaksjonen går veldig lenge?

Løsningsforslag b)



Om reaksjonen går veldig lenge vil $f(t)$ gå mot $2,5$. Dette kan vi mistenke når vi ser på grafen, men siden grafen bare viser forløpet innenfor de første 440 sekundene, må vi bruke funksjonsuttrykket til å beregne grensen. Vi vet nemlig at $\lim_{t\to\infty} e^{-0,012t} = 0$, så $\lim_{t\to\infty} f(x) = 2,5 - 2,5 \cdot 0 = 2,5$

Svar: Om reaksjonen får holde på uendelig lenge går $f(t)$ mot $2,5$.

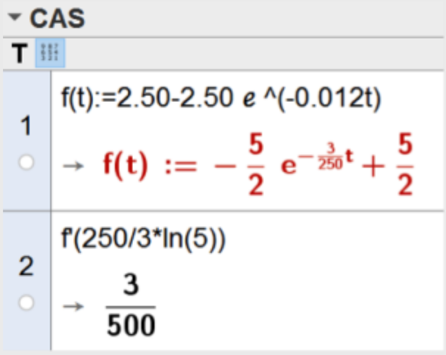
c)

Reaksjonshastigheten på et tidspunkt t er $f'(t)$.

Hva er reaksjonshastigheten når konsentrasjonen er 2,00 millimol/L?

Løsningsforslag c)

Vi vet at $f\left(\frac{250}{3}\ln 5\right) = 2$. Vi regner ut $f'\left(\frac{250}{3}\ln 5\right)$ i CAS:



$$f'\left(\frac{250}{3}\ln 5\right) = \frac{3}{500} = 0,006$$

Svar: Reaksjonshastigheten er $0,006$ millimol/Ls

Oppgave 2 (5 poeng) Nettkode: E-4CZ4

a)
Skriv opp alle primtallene fra og med 2 til og med 25.

Løsningsforslag a)

Svar: Primtallene fra og med 2 til og med 25 er $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$.

b)
25 like kuler som er merket med tallene fra og med 1 til og med 25, ligger i en bolle. Vi trekker tilfeldig 5 kuler fra bollen uten tilbakelegging og leser av tallene.

Bestem sannsynligheten for at vi trekker ut akkurat 2 primtall.

Løsningsforslag b)

$$\frac{\binom{9}{2}\cdot\binom{16}{3}}{\binom{25}{5}} \approx \frac{96}{253} \approx 0{,}38$$

Svar: P(2 primtall)= $\frac{96}{253}$

c)
Bestem sannsynligheten for at vi trekker ut minst 3 primtall.

Løsningsforslag c)

Vi regner ut $P(0 \text{ primtall})$:

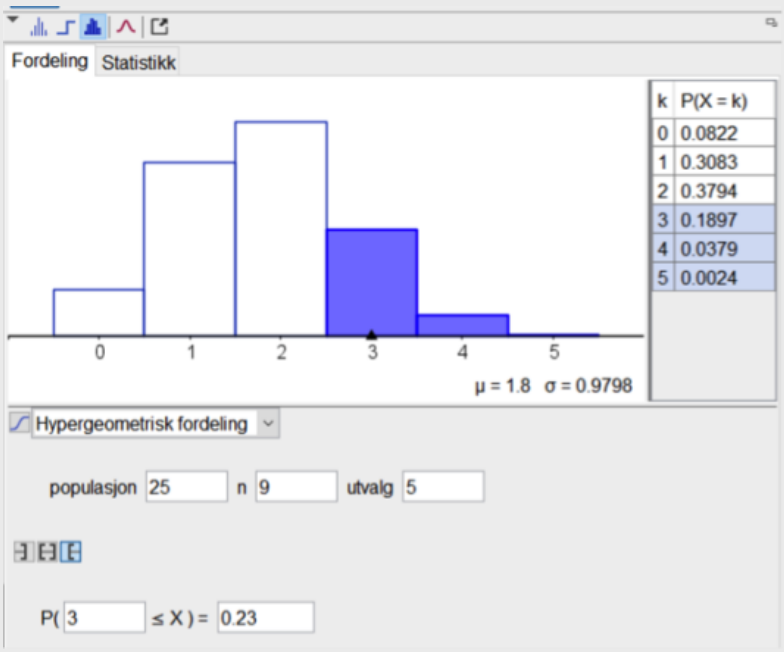
$$P(0 \text{ primtall}) = \frac{\binom{16}{5}}{\binom{25}{5}} = \frac{104}{1265}$$

$$P(1 \text{ primtall}) = \frac{\binom{16}{4}\cdot\binom{9}{1}}{\binom{25}{5}} = \frac{78}{253}$$

$$1 - P(0 \text{ primtall}) - P(1 \text{ primtall}) - P(2 \text{ primtall})$$

$$1 - \frac{104}{1265} - \frac{78}{253} - \frac{96}{253} = \frac{291}{1265} \approx 0,23$$

Geogebra har en egen sannsynlighetskalkulator som løser dette på en svært effektiv måte (se skjermbilde under). Vi skriver at vi ser på en hypergeometrisk fordeling, med totalt 25 objekter, hvorav 9 er gunstige, og vi ser på et utvalg av størrelse 5.



Svar: Sannsynligheten for å trekke minst 3 primtall er $\frac{291}{1265} \approx 0,23$.

Oppgave 3 (4 poeng) Nettkode: E-4CZ8

Vi har punktene $A\,(2,\ 1)$, $B\,(4,\ 5)$ og $C\,(t+3,\ t)$.

a)
Bruk vektorregning til å bestemme t slik at punktene A, B og C ligger på en rett linje.

Løsningsforslag a)

$$\vec{AB} = \left[4-2, 5-1\right] = \left[2, 4\right]$$
$$\vec{AC} = \left[t+3-2, t-1\right] = \left[t+1, t-1\right]$$

Vi vil ha samme stigningstall på begge vektorene. Siden begge vektorene starter i A vil punktene da ligge på samme linje. Stigningstallet kan beskrives som $\frac{\triangle y}{\triangle x}$, endring i y-verdi delt på endring i x-verdi.

$$\frac{t-1}{t+1} = \frac{4}{2}$$

$$t-1 = 2(t+1)$$
$$t = -3$$

Svar: $\underline{\underline{t = -3}}$

b)
Bruk vektorregning til å bestemme t slik at $\angle ACB = 90^\circ$.

Løsningsforslag b)

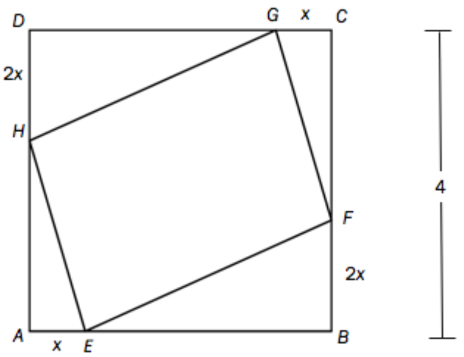
$$\vec{AC} = \left[t+1, t-1\right]$$
$$\vec{BC} = \left[t-1, t-5\right]$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0$$
$$[t+1, t-1] \cdot [t-1, t-5] = 0$$
$$(t-1)(t+1) + (t-1)(t-5) = 0$$
$$t^2 - 1 + t^2 - 6t + 5 = 0$$
$$2t^2 - 6t + 4 = 0$$
$$t^2 - 3t + 2 = 0$$
$$(t-1)(t-2) = 0$$

Svar: $\underline{\underline{t = 1 \text{ og } t = 2}}$

Oppgave 4 (8 poeng) Nettkode: E-4CZC

I et kvadrat $ABCD$ med side 4 er det innskrevet et parallellogram $EFGH$. Vi setter $AE = CG = x$ og $BF = DH = 2x$. Se skissen nedenfor.



a)

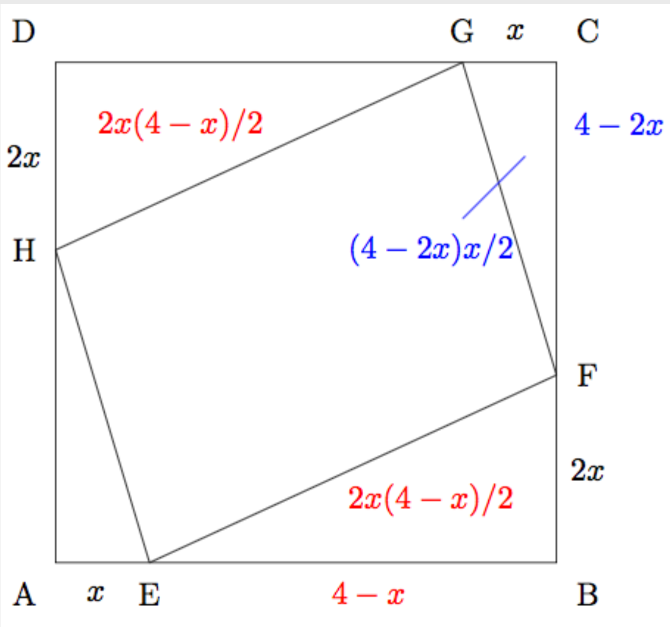
Vis at arealet T av parallellogrammet $EFGH$ er

$$T(x) = 4x^2 - 12x + 16 \quad , \qquad x \in [0, 2]$$

Løsningsforslag a)

Vi skisserer på figuren under. Vi vet at alle sidene i kvadratet $\square ABCD$ er 4. Siden $AE = x$ er $EB = 4 - x$. På samme måte vet vi at $BF = 2x$, så $FC = 4 - 2x$.

Vi kan regne ut $A_{\triangle EBF} = \frac{2x(4-x)}{2} = A_{\triangle GDH}$, og $A_{\triangle AEH} = \frac{(4-2x)x}{2} = A_{\triangle CGF}$



Vi kan nå finne arealet av parallellogrammet ved å ta $A_{\square ABCD}$ og trekke fra arealet av de fire trekantene.

$T = A_{\square ABCD} - A_{\triangle AEH} - A_{\triangle EBF} - A_{\triangle CGF} - A_{\triangle GDH}$

$$T = 16 - 2 \cdot \frac{(4-2x)x}{2} - 2 \cdot \frac{2x(4-x)}{2}$$

$T = 16 - 4x + 2x^2 - 8x + 2x^2$
$T = 4x^2 - 12x + 16$

Grensen $x \in [0, 2]$ kommer av at om $x > 2$ vil $2x > 4$, altså vil ikke figuren gi mening lengre. Parallellogrammet vil ikke være inne i kvadradet $\square ABCD$.

b)
Bestem x slik at arealet av parallellogrammet $EFGH$ blir halvparten av arealet av kvadratet $ABCD$.

Løsningsforslag b)

Arealet til $\square ABCD$ er $4^2 = 16$. Vi skal løse ligningen $T(x) = \frac{16}{2} = 8$. Vi løser det i CAS og får $x = 1, x = 2$.

Svar: $x = 1, x = 2$.

c)
Bestem x slik at arealet av parallellogrammet $EFGH$ blir minst mulig.

Bestem det minste arealet.

Løsningsforslag c)

Min[T, 0, 2] gir bunnpunktet $\left(\frac{3}{2}, 7\right)$

Svar: Arealet er minst når $x = 1,5$. Det minste mulige arealet er 7.

d)

Vi legger figuren inn i et koordinatsystem slik at A ligger i origo og B på positiv x-akse.

Bestem vektorene $\overrightarrow{HE}$ og $\overrightarrow{HG}$ uttrykt ved x og bruk dette til å bestemme x slik at parallellogrammet $EFGH$ blir et rektangel.

Løsningsforslag d)

$H = (0, 4-2x)$, $E = (x, 0)$, $G = (4-x, 4)$. Vi kan nå bestemme $\vec{HE}$ og $\vec{HG}$.

$\vec{HE} = \left[x, 2x-4\right]$

$\vec{HG} = \left[4-x, 4-\left(4-2x\right)\right] = \left[4-x, 2x\right]$

Vi ønsker $\vec{HE} \perp \vec{HG}$, altså $\vec{HE} \cdot \vec{HG} = 0$

$[x, 2x-4] \cdot [4-x, 2x] = 0$

$4x - x^2 + 4x^2 - 8x = 0$

$3x^2 - 4x = 0$

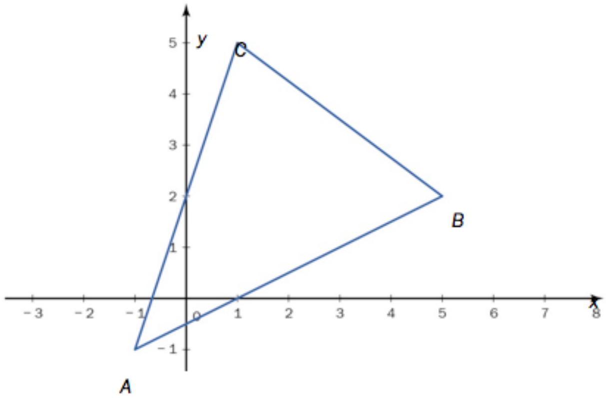
$x(3x-4) = 0$

$x = 0$ v $x = \frac{4}{3}$

Svar: $\vec{HE} = \left[x, 2x-4\right]$, $\vec{HG} = \left[4-x, 2x\right]$. Parallellogrammet er et rektangel når $x = \frac{4}{3}$ og når $x = 0$. Når $x = 0$ er parallellogrammet $EFGH$ et kvadrat, men det er et spesialtilfelle av et rektangel.

Oppgave 5 (6 poeng) Nettkode: E-4CZI

ΔABC har hjørnene $A(-1,-1)$, $B(5,2)$ og $C(1,5)$. Se figuren nedenfor.



Likningen for linjen gjennom A og B er $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, og likningen for linjen gjennom A og C er $y = 3x + 2$.

a)
Bestem likningen for linjen gjennom B og C .

Løsningsforslag a)

Stigningstallet til linja gjennom C og B er $\frac{2-5}{5-1} = \frac{-3}{4}$
Linjen gjennom B og C er da $y = -\frac{3}{4}x + b$. Vi setter inn $y = 5$ og $x = 1$ (dette er punkt C) i likningen for å bestemme b.

$5 = -\frac{3}{4} \cdot 1 + b$

$\frac{23}{4} = b$

Svar: Linjen gjennom B og C har likning $y = -\frac{3}{4}x + \frac{23}{4}$

b)
I oppgave 5 i Del 1 har du vist at dersom to linjer står vinkelrett på hverandre, er produktet av stigningstallene lik -1 .

Bruk denne egenskapen til å vise at linjen som går gjennom C og som står vinkelrett på sidekanten AB har likningen $y = -2x + 7$.

Løsningsforslag b)

Linjen gjennom AB har stigningstall $\frac{1}{2}$. Linjen gjennom C som står vinkelrett på AB har likning $y = ax + b$, hvor $a \cdot \frac{1}{2} = -1$.

$a = -2$, $y = -2x + b$. Linjen går gjennom $C = (1,5)$.

$5 = -2(1) + b$

$b = 7$

$y = -2x + 7$

c)
På samme måte kan det vises at linjen som går gjennom A og som står vinkelrett på sidekanten BC har likningen $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$, og linjen som går gjennom B og som står vinkelrett på AC har likningen $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$.

Vis ved regning at de tre høydene i ΔABC skjærer hverandre i ett og samme punkt.

Bestem koordinatene til dette skjæringspunktet.

Løsningsforslag c)

Vi finner skjæringspunktet mellom linjen gjennom C og linjen gjennom A.

$-2x + 7 = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$

$-6x + 21 = 4x + 1$

$20 = 10x$

$x = 2$

Vi setter inn $x = 2$ i likningen for linjen gjennom C. $-2(2) + 7 = 3$
Linjene skjærer hverandre i $(2,3)$. Vi finner så skjæringspunktet mellom linjen gjennom C og linjen gjennom B.

$-2x + 7 = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$

$-6x + 21 = -1x + 11$

$10 = 5x$

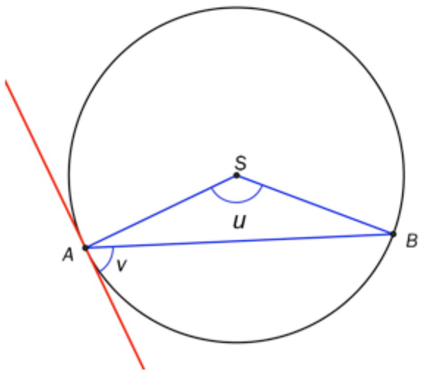
$x = 2$

Siden dette er et skjæringspunkt med linja gjennom C vet vi at y-verdien er 3 også her. Altså går alle tre linjene gjennom $(2,3)$.

Svar: Linjene skjærer hverandre i $(2,3)$.

Oppgave 6 (3 poeng) Nettkode: E-4CZN

I en sirkel med sentrum S er det innskrevet en ΔABS der $\angle ASB = u$. Sirkelen har en tangent i punktet A. Vinkelen mellom tangenten og siden AB er v .

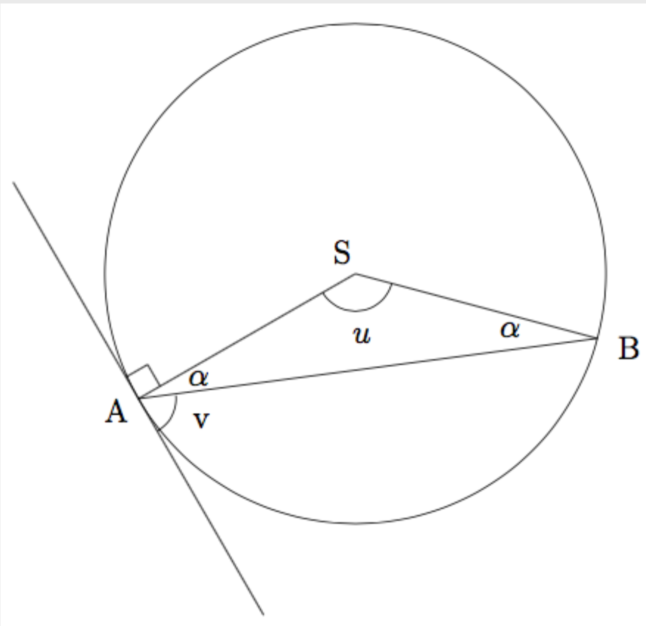


a)

Vis at $\angle BAS = 90^{\circ} - \frac{u}{2}$.

Løsningsforslag a)

Vi vet at $AS = BS$ siden begge sidene er en radius av sirkelen. Dermed er $\angle BAS = \angle ABS = \alpha$.



Vi vet og at vinkelsummen i $\triangle ABS = 180^{\circ} = u + 2\alpha$.

$\alpha = \frac{180^{\circ} - u}{2} = 90^{\circ} - \frac{u}{2}$

$\alpha = \angle BAS$

b)

Vis at $v = \frac{u}{2}$.

Løsningsforslag b)

Vi vet at $\angle BAS + v = 90^\circ$. Setter vi inn $\angle BAS = 90^\circ - \frac{u}{2}$ fra oppgave **a)** får vi

$v = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{u}{2}\right)$

$v = \frac{u}{2}$

Oppgave 7 (4 poeng) Nettkode: E-4CZQ

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \frac{u}{v}$

der u og v er funksjoner av x. Vi antar i denne oppgaven at $u > 0$ og $v > 0$.

Logaritmeregelen for en brøk gir $\ln(f(x)) = \ln u - \ln v$

a)
Bruk logaritmeregelen og kjerneregelen til å bestemme $(\ln f(x))'$ uttrykt ved u, v, u' og v'.

Løsningsforslag a)

$\left(\ln f\left(x\right)\right)' = \left(\ln u - \ln v\right)' = \left(\ln u\right)' - \left(\ln v\right)' = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$

Svar: $\underline{\underline{\left(\ln f\left(x\right)\right)' = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}}}$

b)
Bruk uttrykket fra oppgave a) til å utlede derivasjonsregelen for en brøk.

Løsningsforslag b)

Vi vet at $\frac{u}{v} = f\left(x\right) = e^{\ln(f(x))} = e^{\ln u - \ln v}$

Dermed er $f'\left(x\right) = \left(e^{\ln u - \ln v}\right)'$.

Når vi deriverer e^g får vi $g' \cdot e^g$. I vårt tilfelle er $g = \ln u - \ln v$, som vi deriverte i oppgave **a)**.

$f'\left(x\right) = \left(\left(\ln u\right)' - \left(\ln v\right)'\right) \cdot e^{\ln u - \ln v}$

Vi setter inn igjen $\frac{u}{v}$ for $e^{\ln u - \ln v}$.

$f'\left(x\right) = \left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}\right) \cdot \frac{u}{v}$

Vi setter fellesnevner inne i parentesen.

$f'\left(x\right) = \left(\frac{u'v}{uv} - \frac{uv'}{uv}\right)\frac{u}{v}$

$f'\left(x\right) = \left(\frac{u'v - uv'}{uv}\right)\frac{u}{v}$

$f'\left(x\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Dette er formelen vi kjenner igjen, og vi er kommet i mål.