MAT1011 2013 Vår

Eksamenstid:

5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:
Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:
Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Du skal svare på alle oppgavene.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.

Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Andre opplysninger:
Kilder for bilder, tegninger osv.

- Melk: (http://www.tine.no, 4.07.2016)
- Poteter: (http://www.freeimages.com/, 4.07.2016)
- Ost: (www.tine.no, 4.07.2016)
- Skinke: (http://www.matstart.no/, 4.07.2016)
- Hjort: (http://www.freeimages.com/, 4.07.2016)
- Tørr sand: (http://forskning.no/, 4.07.2016)

Tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng) Nettkode: E-4AB4

Hilde skal kjøpe

2 L melk

2,5 kg poteter

0,5 kg ost

200 g kokt skinke

Gjør et overslag og finn ut omtrent hvor mye hun må betale.

Løsningsforslag

Vi tar alle varene i rekkefølgen oppgitt i oppgaven.

Først skal Hilde kjøpe 2 liter melk til $14,95\text{ kr}$ per liter. Vi runder prisen opp til 15 kr per liter, og to liter melk koster da cirka $2 \cdot 15\text{ kr} = 30\text{ kr}$.

Neste punkt på listen er poteter. Prisen per kilogram er $8,95\text{ kr}$, som vi runder opp til 10 kr. Hilde skal ha $2,5\text{ kg}$ poteter, som blir cirka $2,5 \cdot 10\text{ kr} = 25\text{ kr}$. Med melken blir det totalt $30\text{ kr} + 25\text{ kr} = 55\text{ kr}$.

Ost koster $89,5$ kroner per kilogram, som vi runder opp til 90 kr. Vi kunne ha rundet opp til 100 kr, men vi har ikke så mange muligheter til å runde ned, og da kan summen bli for høy. Hilde skal ha en halvkilo ost, som koster ca. $0,5 \cdot 90\text{ kr} = 45\text{ kr}$. Med de andre varene blir summen $55\text{ kr} + 45\text{ kr} = 100\text{ kr}$.

Til sist skal Hilde kjøpe 200 g skinke til 199 kr per kilogram. Vi runder prisen opp til 200 kr. Vi skal ha 200 g, altså én femtedels kilogram, så dette koster $\frac{1}{5} \cdot 200\text{ kr} = 40\text{ kr}$. Den totale summen blir $100\text{ kr} + 40\text{ kr} = 140\text{ kr}$.

Den egentlige summen Hilde må betale i kroner er

$$2 \cdot 14,95 + 2,5 \cdot 8,95 + 0,5 \cdot 89,95 + 0,2 \cdot 199 = 137,05\ ,$$

så vi var ganske nærme.

Svar: Cirka 140 kr.

Oppgave 2 (2 poeng) Nettkode: E-4AB1

En vare koster nå 210 kroner. Prisen er da satt ned med 30 %.

Hva kostet varen før prisen ble satt ned?

Løsningsforslag

Vi vet ikke hvor mye varen kostet før prisen ble satt ned, så vi gir dette tallet et navn – la oss si x *kroner*. Prisen x ble satt ned $30\ \%$, og da var den 210. Det betyr at 210 er $70\ \%$ av x, altså at

$$210 = x \cdot 70\ \%.$$

En annen måte å si dette på er at $210 = x \cdot 0,7$. Dette er en ligning, og vi vil finne et tall x som passer inn i ligningen. Derfor dividerer vi med $0,7$ på hver side av likhetstegnet, og forkorter:

$$\frac{x \cdot 0{,}7}{0{,}7} = \frac{210}{0{,}7},$$
$$x = \frac{210}{0{,}7}.$$

Nå må vi regne ut brøken $\frac{210}{0{,}7}$. Vi kunne gjort det for hånd, men det trenger vi ikke hvis vi ser at

$$\frac{210}{0,7} = \frac{210 \cdot 10}{0,7 \cdot 10} = \frac{21 \cdot 100}{7} = \frac{21}{7} \cdot 100.$$

Vi vet at $3 \cdot 7 = 21$, så $\frac{21}{7} = 3$; derfor er $\frac{210}{0{,}7} = 3 \cdot 100 = 300$. Dermed var den opprinnelige prisen på varen $300\ \mathrm{kr}$.

Svar: $\underline{\underline{300\ \mathrm{kr}}}$.

Oppgave 3 (2 poeng) Nettkode: E-4AB6

En vare kostet 150 kroner i basisåret. I dag er indeksen for varen 110.

Hvor mye koster varen i dag dersom vi antar at prisutviklingen har fulgt utviklingen i indeksen?

Løsningsforslag

Vi har følgende sammenheng mellom indeks og pris:

$\frac{\text{pris i basisåret}}{\text{indeks i basisåret}} = \frac{\text{pris i dag}}{\text{indeks i dag}}$

Vi har allerede prisen i basisåret (150 kroner) og indeksen i dag (110), så vi setter dette inn i likningen over. Indeksen i basisåret er per definisjon 100.

$$\frac{150\text{ kr}}{100} = \frac{\text{pris i dag}}{110}.$$

La oss si at x er prisen på varen i dag i kroner. Da får vi likningen

$$\frac{150}{100} = \frac{x}{110}.$$

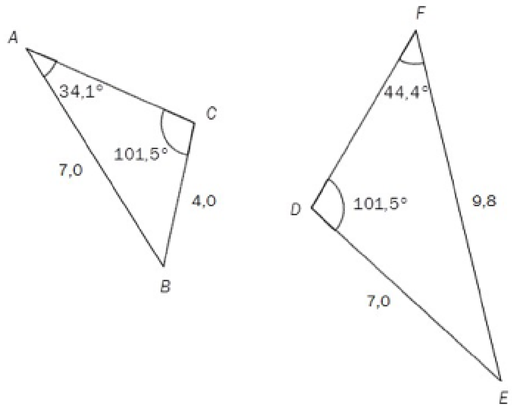
Vi vil finne tallet x som passer inn i likningen over. Det første vi kan gjøre er å se at $\frac{150}{100} = 1,5$, og videre kan vi multiplisere med 110 på begge sider av likhetstegnet og forkorte.

$$\begin{aligned} 1,5 \cdot 110 &= \frac{x}{110} \cdot 110 \\ 1,5 \cdot 110 &= x. \end{aligned}$$

Det eneste vi trenger å gjøre for å finne den nye prisen x på varen, er å regne ut $1,5 \cdot 110$. Vi kan regne det ut for hånd på vanlig måte, men det kan være lettere å se at $1,5 \cdot 110$ skal være 110 pluss halvparten av 110, altså 55. (Dette kan vi se mer matematisk ved at $1,5 \cdot 110 = (1 + 0,5) \cdot 110 = 110 + 55$.) Dermed er $1,5 \cdot 110 = 110 + 55 = 165$, så varen koster 165 kr i dag.

Svar: $\underline{\underline{165\text{ kr}}}$.

Oppgave 4 (3 poeng) Nettkode: E-4AB9



a)

Vis at de to trekantene ovenfor er formlike.

Løsningsforslag a)

Vi ser at $\angle BCA = \angle FDE$ i de to trekantene, så de har i hvert fall én vinkel hver som er like store. Det eneste vi trenger å vise videre, er enten at $\angle ABC = 44,4^\circ$ eller at $\angle DEF = 34,1^\circ$.

Svar:

Vi kan vise begge deler ved å bruke at vinkelsummen i trekanter er lik 180°. I ΔABC har vi at

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ,$$

altså at

$$\angle ABC + 101,5^\circ + 34,1^\circ = 180^\circ,$$

som betyr at

$$\angle ABC = 180^\circ - 101,5^\circ - 34,1^\circ = 44,4^\circ,$$

akkurat som vi trengte. På helt samme måte har vi at

$$\angle DEF = 180^\circ - 101,5^\circ - 44,4^\circ = 34,1^\circ.$$

Dermed vet vi at alle vinklene i de to trekantene er like store, så trekantene er formlike.

b)

Bestem lengden av sidene *AC* og *DF* .

Løsningsforslag b)

Siden trekantene er formlike, er forholdet mellom tilsvarende sider like. For å se hvilke sider i ΔABC som tilsvarer hvilke sider i ΔDEF, må vi se på vinklene. Siden BC er mellom vinklene $101,5^\circ$ og $44,4^\circ$, og det samme er siden DF, så BC tilsvarer DF. På samme måte ser vi at AB tilsvarer EF, og at AC tilsvarer DE. Forholdene mellom disse er altså like, så vi har at

$$\frac{DF}{BC} = \frac{EF}{AB} = \frac{DE}{AC}.$$

Først vil vi finne DF. Til dette bruker vi likheten

$$\frac{DF}{BC} = \frac{EF}{AB},$$

siden lengden til DF er den eneste ukjente her. Vi setter inn at $EF = 9,8$, $AB = 7$ og $BC = 4$. Da blir ligningen

$$\frac{DF}{4} = \frac{9,8}{7}.$$

Vi vil ha DF alene på den ene siden av likhetstegnet, så vi multipliserer med 4 på begge sider og forkorter.

$$\frac{DF}{4} \cdot 4 = \frac{9{,}8}{7} \cdot 4,$$
$$DF = \frac{9{,}8}{7} \cdot 4.$$

Nå må vi regne ut $\frac{9{,}8}{7} \cdot 4$. Vi starter med å regne ut brøken $\frac{9{,}8}{7}$ for hånd.

$9,$ 8 : 7 = $1,$ 4
7
$2,$ 8
$2,$ 8
0

Dermed får vi at $\frac{9{,}8}{7} \cdot 4 = 1,4 \cdot 4 = 5,6$, så $DF = 5,6$.

Nå vil vi finne AC. Vi har likningen

$$\frac{EF}{AB} = \frac{DE}{AC},$$

men her er AC i nevneren, som det tar mer tid å regne med. Derfor snur vi begge brøkene på hodet, og får

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{DE}.$$

(Dette kan vi gjøre fordi brøkene $\frac{EF}{AB}$ og $\frac{DE}{AC}$ er det *samme tallet*, og da kan vi si at 1 dividert med hver av brøkene også er det samme. Hvis vi dividerer 1 med en brøk, for vi bare brøken andre veien, og det er akkurat det vi har gjort her.) Vi setter inn $AB = 7$, $EF = 9,8$ og $DE = 7$, og da blir likningen

$$\frac{7}{9,8} = \frac{AC}{7}.$$

Denne likningen løser vi på samme måte som før, ved å multiplisere med 7 på begge sider og forkorte. Da får vi at

$$AC = \frac{7}{9,8} \cdot 7.$$

Denne brøken kan vi også regne ut for hånd, som forrige gang, men vi kan spare oss utregningen hvis vi ser at $7 \cdot 7 = 49$, og at $49 \cdot 2 = 98$. Da får vi nemlig at

$$\frac{7}{9,8} \cdot 7 = \frac{7 \cdot 7}{98} \cdot 10 = \frac{49}{98} \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5,$$

så vi har at $AC = 5$.

Svar: $DF = 5,6$ og $AC = 5$.

Oppgave 5 (3 poeng) Nettkode: E-4AE4

På en pakke grøtris står følgende opplysninger:

Porsjoner	Ris	Vann	Melk
3	1,5 dL	3,0 dL	0,75 L

a)
Hvor mye ris, vann og melk trenger du for å lage 10 porsjoner med grøt?

Løsningsforslag a)

Vi må multiplisere oppskriften med $\frac{10}{3}$. Til 3 porsjoner skal vi ha $1,5\ \mathrm{dL}$ ris, og til 10 porsjoner må vi da ha

$$1,5\ \mathrm{dL} \cdot \frac{10}{3} = \frac{15\ \mathrm{dL}}{3} = 5\ \mathrm{dL}$$

ris. Mengden vann vi skal ha, er

$$3\ \mathrm{dL} \cdot \frac{10}{3} = 10\ \mathrm{dL} = 1\ \mathrm{L},$$

og mengden melk er

$$0,75\ \mathrm{L} \cdot \frac{10}{3} = 0,25\ \mathrm{L} \cdot 10 = 2,5\ \mathrm{L}.$$

Svar: Til 10 porsjoner trenger vi $5\ \mathrm{dL}$ ris, $1\ \mathrm{L}$ vann og $2,5\ \mathrm{L}$ melk.

b)
Du har nok vann og ris, men du har bare 5 L melk.

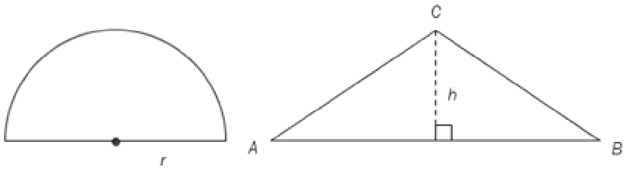
Hvor mange porsjoner grøt kan du lage?

Løsningsforslag b)

Vi trengte $2,5\ \mathrm{L}$ melk til 10 porsjoner, og da vil $5\ \mathrm{L}$ melk holde til dobbelt så mange, altså 20, porsjoner.

Svar: 20 porsjoner.

Oppgave 6 (4 poeng) Nettkode: E-4AGD



Et område har form som en halvsirkel med radius $r = 1{,}0$ m. Et annet område har form

som en likebeint ΔABC , der $AB = 3{,}0$ m og høyden $h = 1{,}0$m. Se figurene ovenfor.

Gjør beregninger og svar på spørsmålene under.

a)
Hvilket av de to områdene har størst areal?

Løsningsforslag a)

Vi starter med halvsirkelen. Arealet A til en sirkel med radius r er gitt ved $A = \pi r^2$; arealet til en halvsirkel med radius r må derfor være $\frac{1}{2}\,\pi r^2$. I vårt tilfelle er $r = 1\,\mathrm{m}$, så arealet til halvsirkelen er $\frac{1}{2}\,\pi\,\mathrm{m}^2$.

Videre vil vi finne arealet til trekanten. Arealet A til en trekant med grunnlinje g og høyde h, er gitt ved

$$A = \frac{1}{2}gh.$$

Vi velger AB til å være grunnlinjen til trekanten, som er $3\,\mathrm{m}$. Høyden vil da være $h = 1\,\mathrm{m}$, og arealet er $\frac{1}{2}\cdot 3\,\mathrm{m}\cdot 1\,\mathrm{m} = \frac{1}{2}\cdot 3\,\mathrm{m}^2$.

Arealet til halvsirkelen er $\frac{1}{2}\,\pi\,\mathrm{m}^2$, og arealet til trekanten er $\frac{1}{2}\cdot 3\,\mathrm{m}^2$. Siden $\pi \approx 3,14 > 3$, og da må $\frac{1}{2}\,\pi\,\mathrm{m}^2 > \frac{1}{2}\cdot 3\,\mathrm{m}^2$, så arealet til halvsirkelen er størst.

Svar: Halvsirkelen har størst areal.

b)
Hvilket av de to områdene har størst omkrets?

Løsningsforslag b)

Vi starter med halvsirkelen igjen. Omkretsen O til en sirkel med radius r er $O = 2\,\pi r$. Halvsirkelen vår har halvparten av denne omkretsen, altså πr, addert med diameteren i bunnen, som er $2r$ lang. Omkretsen blir dermed $\pi r + 2r = \pi \cdot 1\,\mathrm{m} + 2\,\mathrm{m} = (\pi + 2)\,\mathrm{m}$.

Videre skal vi sammenligne med omkretsen til trekanten. Vi gjør dette må to forskjellige måter; den første måten tar desidert raskest tid.

Vi vet ikke hvor lange sidene AC og CB er, men vi vet at hvis vi legger dem sammen, så er $AC + CB > AB = 3\,\mathrm{m}$. Omkretsen til trekanten er $AB + AC + BC > 3\,\mathrm{m} + 3\,\mathrm{m} = 6\,\mathrm{m}$ (det vil si, omkretsen er større enn 6 meter). Omkretsen til halvsirkelen var derimot $(\pi + 2)\,\mathrm{m} \approx (3{,}14 + 2)\,\mathrm{m} = 5{,}14\,\mathrm{m}$, og det er mindre enn $6\,\mathrm{m}$, så trekanten har størst omkrets. (Det betyr at halvsirkelen har størst areal, men minst omkrets!)

ALTERNATIV LØSNING

Svar: Omkretsen til trekanten er størst.

Oppgave 7 (5 poeng) Nettkode: E-4AHG

I en tank er det 60 L vann. Hver dag tapper vi 5,0 L vann fra tanken.

a)
Hvor mye vann er det igjen i tanken etter åtte dager?

Hvor mange dager går det før tanken er tom?

Løsningsforslag a)

Etter 8 dager har vi tappet $8 \cdot 5\,\mathrm{L} = 40\,\mathrm{L}$ vann. Da er det $60\,\mathrm{L} - 40\,\mathrm{L} = 20\,\mathrm{L}$ vann igjen i tanken. Dermed må vi tappe $20\,\mathrm{L}$ til for å tømme hele tanken, og med $5\,\mathrm{L}$ per dag vil dette ta 4 dager ekstra, fordi $4 \cdot 5\,\mathrm{L} = 20\,\mathrm{L}$. Da tar det $8 + 4 = 12$ dager å tømme hele tanken.

Svar: Etter 8 dager er det $20\,\mathrm{L}$ vann igjen i tanken, og det tar 12 dager før tanken er tom.

b)
Bestem funksjonsuttrykket $f(x)$ til en funksjon f som viser hvor mange liter vann det er igjen i tanken etter x dager.

Løsningsforslag b)

I starten, altså når $x = 0$, er det $60\,\mathrm{L}$ vann i tanken. Hver dag skal vi trekke tappe $5\,\mathrm{L}$ vann, så etter x dager har vi tappet $x \cdot 5\,\mathrm{L}$ vann; det betyr at etter x dager, så er det $60\,\mathrm{L} - x \cdot 5\,\mathrm{L}$ vann. Derfor er funksjonsuttrykket vårt $f(x) = 60 - x \cdot 5$, eller

$$f(x) = 60 - 5x.$$

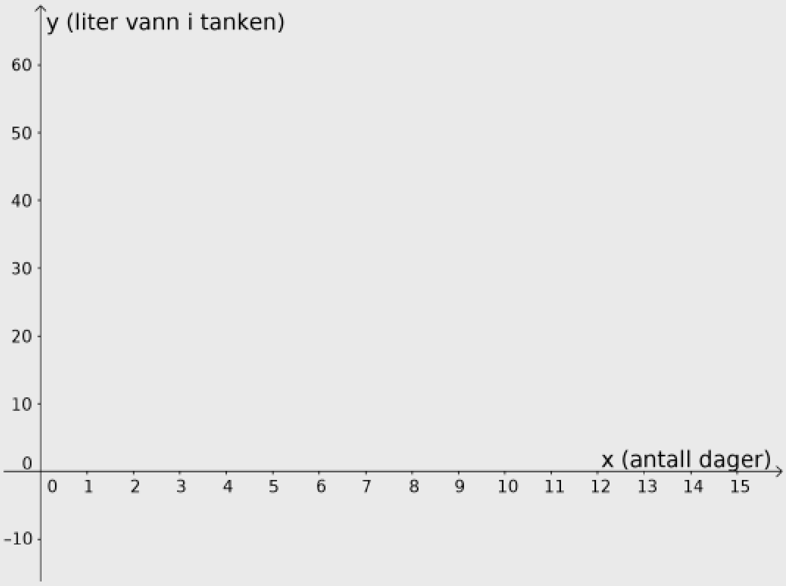
Svar: $f(x) = 60 - 5x$.

c)
Tegn grafen til f.

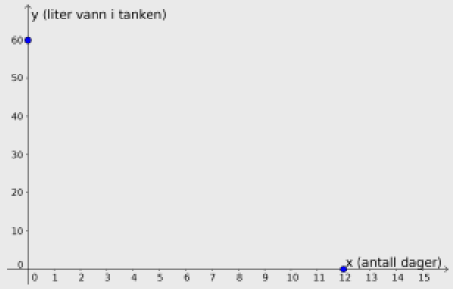
Vis hvordan du kan bruke grafen til å finne svar på spørsmålene i oppgave 7 a).

Løsningsforslag c)

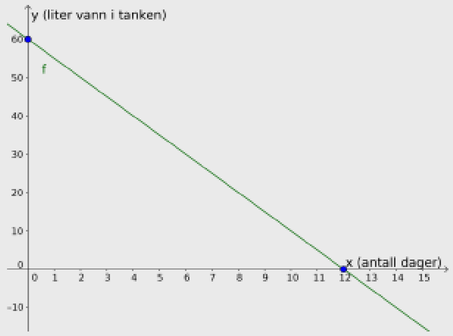
Vi starter med å lage et koordinatsystem. Vi tegner x-aksen mellom 0 og 15, fordi vi ikke er interessert i dagene *før* vi begynner å tappe vann fra tanken (det vil si, der $x < 0$), og vi vil se tydelig der grafen krysser x-aksen (som er der $x = 12$, som vi skal se). Vi tegner y-aksen mellom -10 og 60. Vi må huske å sette navn på aksene: x betyr antall dager, og y er hvor mye vann det er igjen i tanken.



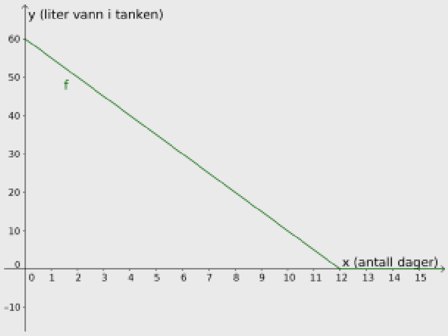
Nå skal vi tegne grafen til f. Vi vet at f er lineær (altså at den er på formen $f(x) = ax + b$), så grafen til f er en rett linje. Derfor trenger vi bare å finne to punkter på grafen, og tegne den rette linjen mellom disse punktene. Vi vet at når $x = 0$, så er $f(x) = 60$, fordi det er 60 liter vann i tanken i begynnelsen. Derfor er $(0, 60)$ et punkt på grafen. Vi vet dessuten at etter 12 dager, så er tanken tom. Det betyr at $f(12) = 0$, så $(12, 0)$ er et annet punkt på grafen. Vi tegner inn disse.



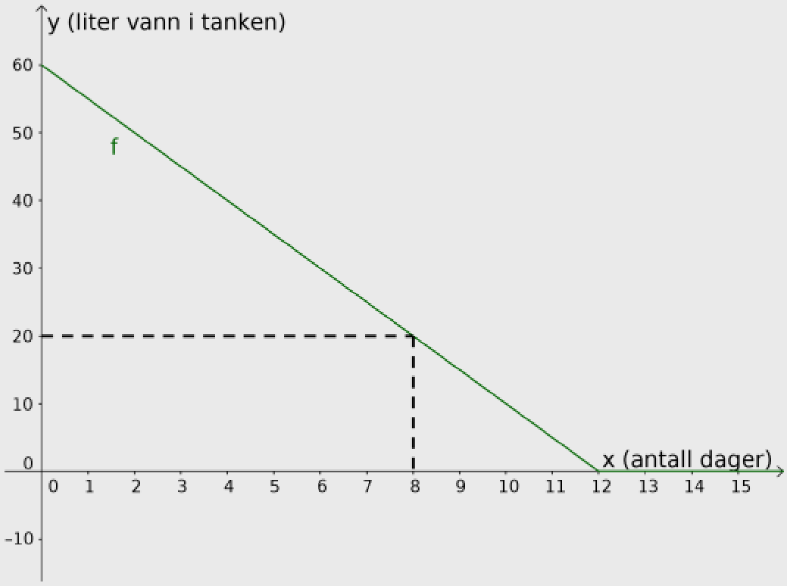
Til slutt tegner vi den rette linjen mellom punktene, med linjal.



Vi kunne også ha latt være å tegne grafen for $x < 0$, fordi vi egentlig ikke vet hvor mye vann det var i tanken før vi begynte. Vi kunne også ha latt grafen vært lik 0 etter $x = 12$, for å vise at tanken er tom etter at vi har tappet alt vannet. Da hadde grafen sett ut slik som vist under.



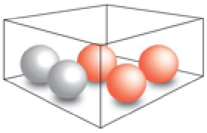
Videre skal vi vise hvordan vi kan bruke grafen til å svare på a). Det første spørsmålet er hvor mange liter vann det er igjen i tanken etter 8 dager. Med koordinatsystemet vårt, betyr "etter åtte dager" det samme som $x = 8$, og mengde vann etter 8 dager er $f(8)$. For å finne $f(8)$, går vi til $x = 8$ på x-aksen, og loddrett oppover til vi treffer grafen til f. Så ser vi på y-aksen hvor høyt dette er. Da ser vi at $f(8) = 20$, så det er $20\,\mathrm{L}$ igjen i tanken.



Videre skal vi finne hvor lang tid det tar før tanken er tom. Det er det samme som å finne ut hvor grafen til f krysser x-aksen, altså finne den x-verdien som gjør at $f(x) = 0$. På grafen ser vi at dette er der $x = 12$.

Svar: Grafen kan brukes til å løse oppgavene ved å se at $f(8) = 20$, og at $f(12) = 0$.

Oppgave 8 (3 poeng) Nettkode: E-4AIT



I en eske er det tre røde og to blå kuler. Sondre trekker tilfeldig to av kulene.

a)
Bestem sannsynligheten for at han trekker to røde kuler.

Løsningsforslag a)

Vi starter med 3 røde og 2 blå kuler. Sannsynligheten for å trekke en rød er i begynnelsen derfor

$$\frac{\text{antall gunstige}}{\text{antall mulige}} = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$$

Hvis vi trekker en rød kule første gang, er det 2 røde kuler og 2 blå kuler igjen. Sannsynligheten for at vi trekker en rød kule andre gang også, blir

$$\frac{\text{antall gunstige}}{\text{antall mulige}} = \frac{2}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Sannsynligheten for at vi trekker to kuler på rad, er lik sannsynligheten for at begge disse to hendelsene inntreffer. Produktsetningen gir oss at sannsynligheten for å trekke to røde kuler er lik

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10},$$

eller $30\ \%$.

Svar: Sannsynligheten er $\frac{3}{10} = 30\ \%$.

b)

Bestem sannsynligheten for at de to kulene han trekker, har samme farge.

Løsningsforslag b)

Vi har to muligheter til å trekke to kuler av samme farge – enten trekker vi to røde, eller så trekker vi to blå. Vi har allerede regnet ut sannsynligheten for at vi trekker to røde, og på tilsvarende vis regner vi ut at sannsynligheten for å trekke to blå, er lik

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10},$$

eller $10\ \%$. Sannsynligheten for at vi enten trekker to blå eller to røde, er dermed

$$\frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5},$$

eller $40\ \%$.

Svar: Sannsynligheten er $\frac{2}{5} = 40\ \%$.

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (8 poeng) Nettkode: E-4AIX

Ole arbeider på et mekanisk verksted. Han har en timelønn på 195 kroner innenfor vanlig arbeidstid. Nedenfor ser du hvor mange timer han arbeidet en måned.

Arbeid	Antall timer
Vanlig arbeidstid	150
Overtid med 50 % tillegg	16
Overtid med 100 % tillegg	6

a)

Bestem bruttolønna til Ole denne måneden.

Løsningsforslag a)

Ole jobbet i 150 timer med vanlig timelønn på 195 kroner. Det blir totalt

$$150 \text{ timer } \cdot 195 \frac{\text{kr}}{\text{time}} = 29250 \text{ kr}$$

Videre jobbet han 16 timer med $50\,\%$ tillegg (altså får han $150\,\%$ av den lønnen han ellers ville fått for disse timene). Totalen for dette blir

$$150\,\% \cdot 16 \text{ timer } \cdot 195 \frac{\text{kr}}{\text{time}} = 4680 \text{ kr}$$

Til slutt ser vi at Ole jobbet i 6 timer med $100\,\%$ tillegg. Det blir

$$200\,\% \cdot 6 \text{ timer } \cdot 195 \frac{\text{kr}}{\text{time}} = 2340 \text{ kr}$$

Brutto månedslønn er summen av disse tre, altså

$$29\,250 \text{ kr} + 4\,680 \text{ kr} + 2\,340 \text{ kr} = 36\,270 \text{ kr}.$$

Svar: $\underline{\underline{36\,270 \text{ kr.}}}$

b)

Ole betaler 2 % av bruttolønna til en pensjonskasse.

Hvor mye betalte Ole til pensjonskassen denne måneden?

Løsningsforslag b)

Prosentfaktoren til $2\ \%$ er $0,02$. Derfor blir $2\ \%$ av brutto månedslønn lik

$2\ \% \cdot 36\ 270\ \mathrm{kr} = 0,02 \cdot 36\ 270\ \mathrm{kr} = 725,40\ \mathrm{kr}.$

I det virkelige liv regnes ikke pensjonsinnskudd ut fra overtidsbetaling, men kun fra ordinær lønn.

Svar: $\underline{\underline{725,40\ \mathrm{kr}}}$.

c)
Ole betaler 36 % skatt.

Hvor mye fikk Ole utbetalt etter at skatten var trukket fra, denne måneden?

Løsningsforslag c)

Trekkgrunnlaget er $36\ 270\ \mathrm{kr} - 725,40\ \mathrm{kr} = 35\ 544,60\ \mathrm{kr}.$ Ole betaler $36\ \%$ skatt av dette beløpet. Prosentfaktoren til $36\ \%$ er $0,36$, så Ole må betale en skatt på $36\ \% \cdot 35\ 544,60\ \mathrm{kr} = 0,36 \cdot 35\ 544,60\ \mathrm{kr} \approx 12\ 796,06\ \mathrm{kr}.$ Det betyr at etter skatten er trukket fra og Ole har betalt pengene til pensjonskassen, så sitter han igjen med $35\ 544,60\ \mathrm{kr} - 12\ 796,06\ \mathrm{kr} = 22\ 748,54\ \mathrm{kr}$

Svar: $\underline{\underline{22\ 748,54\ \mathrm{kr}}}$.

d)
En periode arbeidet Ole med et prosjekt på kveldstid. For timene han brukte på dette prosjektet, fikk han overtid med 50 % tillegg. Han fikk utbetalt 5045 kroner for arbeidet.

Hvor mange timer arbeidet han med prosjektet?

Løsningsforslag d)

Vi antar at Ole ikke får pensjonstrekk fra lønnen som ble utbetalt, selv om dette er tilfelle i de forrige deloppgavene. På den måten trenger vi bare ta hensyn til skattetrekket.

Først regner vi ut hva bruttolønnen blir. Ole fikk utbetalt $5045\ \mathrm{kr}$, og han betaler $36\ \%$ skatt. Det betyr at $5\ 045\ \mathrm{kr}$ er $100\ \% - 36\ \% = 64\ \%$ av bruttolønnen; altså

$$64\ \% \cdot \mathrm{bruttolønn} = 5\ 045\ \mathrm{kr}.$$

Vi kan finne ut hva bruttolønnen er ved å dividere på $64\ \% = 0,64$ på hver side av likhetstegnet, og forkorte. Da får vi

$$\frac{64\ \% \cdot \text{bruttolønn}}{64\ \%} = \frac{5\ 045\ \text{kr}}{64\ \%},$$
$$\text{bruttolønn} = \frac{5\ 045\ \text{kr}}{64\ \%}.$$

Vi regner ut at $\frac{5\ 045\ \text{kr}}{64\ \%} = \frac{5\ 045\ \text{kr}}{0{,}64} = 7\ 882,81\ \text{kr}$. Nå kan vi gå videre med oppgaven.

Vanlig timelønn er på $195\ \text{kr}$, og med $50\ \%$ tillegg blir timelønnen på $292,5\ \text{kr}$. Hvis Ole har jobbet i x timer med $50\ \%$ tillegg, vil han ha tjent

$$292,5\ \text{kr} \cdot x.$$

I denne oppgaven vet vi at Ole har tjent $7\ 882,81\ \text{kr}$ kroner ved å jobbe med $50\ \%$ tillegg. Da har vi fått to uttrykk som sier hva Ole har tjent – det ene uttrykket sier at han har tjent $292,5\ \text{kr} \cdot x$, og det andre uttrykket sier at han har tjent $7\ 882,81\ \text{kr}$. Disse to uttrykkene *må* være like. Det vil si, vi har at

$$292,5 \cdot x = 7\ 882,81.$$

Dette er en ligning, og vi vil finne et tall x som passer inn i likningen. For å gjøre dette, skal vi manipulere likningen til vi får at x står igjen alene på én side. Alt vi trenger å gjøre er å dividere med det som står foran x, altså $292,5$, og forkorte. Vi får

$$\frac{292{,}5 \cdot x}{292{,}5} = \frac{7\ 882{,}81}{292{,}5},$$
$$x = \frac{7\ 882{,}81}{292{,}5}.$$

Vi regner ut at $\frac{7\ 882{,}81}{292{,}5} = 26,95$. Det betyr at $x = 26,95$, altså at Ole brukte nesten 27 timer på prosjektet.

Hvis vi hadde antatt at Ole fikk utbetalt lønnen etter pensjonstrekket, så hadde bruttolønnen blitt $\frac{7\ 882{,}81}{0{,}98} \approx 8\ 043,68\ \text{kr}$ og antall timer hadde vært

$$\frac{8\ 043,68}{292,5} \approx 27,5.$$

Svar: Cirka 27 timer. Hvis vi antar at $2\ \%$ av inntekten gikk til pensjonskassen før Ole fikk utbetalt lønn, er antall timer cirka $27,5$.

Oppgave 2 (5 poeng) Nettkode: E-4AJ3

I en klasse er det 30 elever. Klassen skal arrangere fest. Elevene må bestemme seg for om de vil ha taco eller pizza til middag, og om de vil ha sjokoladekake eller marsipankake til dessert.

Hver elev legger en lapp med hvilken middag de ønsker, i én krukke og en lapp med hvilken kake de ønsker, i en annen krukke.

Nedenfor ser du hvordan ønskene fordeler seg.

Taco	18
Pizza	12

Sjokoladekake	6
Marsipankake	24

For å avgjøre hva menyen skal være, trekker læreren tilfeldig en lapp fra hver krukke.

a)
Bestem sannsynligheten for at det blir taco til middag.

Løsningsforslag a)

Det er står taco på 18 lapper og pizza på 12 lapper, så det er totalt $18 + 12 = 30$ lapper. Hvis vi trekker en lapp tilfeldig fra krukken, er sannsynligheten for at det står taco på den, lik

$$\frac{\text{antall gunstige}}{\text{antall mulige}} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

eller $60\ \%$.

Svar: $\frac{3}{5}$ eller $60\ \%$.

b)
Bestem sannsynligheten for at det blir taco til middag og marsipankake til dessert.

Løsningsforslag b)

Vi trekker en tilfeldig lapp fra krukken med $6 + 24 = 30$ lapper i. På 24 av dem står det marsipankake, så sannsynligheten for å trekke en slik lapp er

$$\frac{\text{antall gunstige}}{\text{antall mulige}} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

eller $80\ \%$. Det betyr at det er $60\ \%$ sannsynlighet for at det blir taco til middag og $80\ \%$ sannsynlighet for at det blir marsipankake til dessert. Sannsynligheten for at begge disse to hendelsene inntreffer, altså at det blir taco til dessert *og* marsipankake til dessert, er $60\ \% \cdot 80\ \% = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{25}$, eller $48\ \%$.

Svar: $\frac{12}{25}$ eller $48\ \%$.

c)

4 elever vil ha pizza og sjokoladekake.

Vi trekker tilfeldig ut en elev.

Bestem sannsynligheten for at eleven vil ha taco og marsipankake.

Løsningsforslag c)

Vi prøver først å løse oppgaven uten å bruke krysstabell. Vi lager krysstabellen under.

Det er 6 elever som vil ha sjokoladekake, og 4 av dem vil også ha pizza, i følge teksten. Det betyr at det er $6 - 4 = 2$ elever som vil ha sjokoladekake og taco. Men det var 18 elever som ville ha taco, og hvis to av disse ville ha sjokoladekake, vil de resterende $18 - 2 = 16$ ha marsipankake. Det betyr at det er 16 elever som vil ha taco og marsipankake. Siden det er totalt 30 elever, er sannsynligheten for at en tilfeldig elev vil ha taco og marsipankake, lik

$$\frac{\text{antall gunstige}}{\text{antall mulige}} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

eller cirka $53,33\ \%$.

Nå lager vi en krysstabell. Det gjør at argumentasjonen blir mye lettere å komme fram til, og det tar ikke lang tid å lage hvis man er vant med det. Først fyller vi inn all informasjonen vi har fått i teksten.

	Sjokoladekake	**Marsipankake**	**Sum**
Taco		?	18
Pizza	4		12
Sum	6	24	30

Vi er interessert i å finne ut hva som står i ruten med spørsmålstegn, altså antall elever som vil ha taco og marsipankake. Vi vet at alle rader og alle kolonner skal summeres opp til det som står ytterst i raden eller kolonnen. (For eksempel er $6 + 24 = 30$ i den nederste raden.) I ruten øverst til venstre skal det derfor stå $6 - 4 = 2$.

	Sjokoladekake	**Marsipankake**	**Sum**
Taco	2	?	18

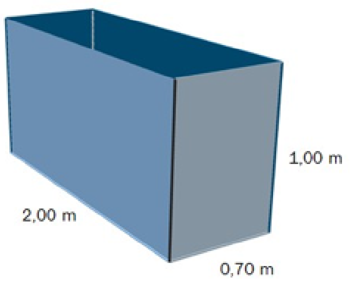
	Sjokoladekake	Marsipankake	Sum
Pizza	4		12
Sum	6	24	30

Dermed ser vi at det skal stå $18 - 2 = 16$ i ruten med spørsmålstegn i. Det betyr at det er 16 elever som ville ha marsipankake og taco, og det var akkurat dette vi ville vite.

Utregningene vi har gjort med krysstabellen er helt tilsvarende det vi gjorde med tekst over.

Svar: $\frac{16}{30} = \frac{8}{15}$ eller ca. $53,33\ \%$.

Oppgave 3 (6 poeng) Nettkode: E-4AK4



Familien Hansen har hytte på fjellet. I kjelleren har de en beholder der de samler opp regnvann. Beholderen har form som et rett firkantet prisme. Se skissen ovenfor.

a)

Hvor mange liter rommer beholderen?

Løsningsforslag a)

Vi lar grunnflaten til prismet være rektangelet med $2\ \mathrm{m}$ i lengde og $0,7\ \mathrm{m}$ i bredde. Arealet til grunnflaten er dermed $2\ \mathrm{m} \cdot 0,7\ \mathrm{m} = 1,4\ \mathrm{m}^2$. Høyden i prismet er $1\ \mathrm{m}$, så volumet til beholderen er $1,4\ \mathrm{m}^2 \cdot 1\ \mathrm{m} = 1,4\ \mathrm{m}^3$. Én kubikkmeter er $1\ 000\ \mathrm{L}$, så beholderen rommer $1\ 400\ \mathrm{L}$.

Svar: $1\ 400\ \mathrm{L}$.

b)

Når det regner, vil alt vannet som treffer hyttetaket, bli ledet ned i beholderen. Hyttetaket er tilnærmet horisontalt og har et areal på 70 m^2. En dag da familien reiser fra hytta, er beholderen tom. I løpet av den neste uken regner det 12 mm.

Hvor høyt i beholderen står vannet når familien kommer tilbake etter denne uken?

Løsningsforslag b)

Først regner vi ut hvor mye regn som ble oppsamlet. Det regnet $12\ \mathrm{mm}$ i løpet av uken. Det betyr at hvis alt dette vannet hadde samlet seg på taket uten å falle ned, så hadde vannet nådd $12\ \mathrm{mm} = 0,012\ \mathrm{m}$ over taket. (Det er ofte lurt å regne om lengdeenheter til meter, spesielt når vi skal regne ut volum.) Taket har et areal på $70\ \mathrm{m}^2$. Å regne ut mengden vann, tilsvarer dermed å regne ut volumet til det rette prismet som vannet utgjør, altså med grunnflate $70\ \mathrm{m}^2$ og høyde $0,012\ \mathrm{m}$. Dette volumet blir

$$0,012\ \mathrm{m} \cdot 70\ \mathrm{m}^2 = 0,84\ \mathrm{m}^3,$$

eller $840\ \mathrm{L}$. Alt dette vannet ble samlet opp i tanken.

Nå kan vi regne ut vannstanden i tanken. Tanken rommer $1\ 400\ \mathrm{L}$, og det betyr at regnvannet fyller opp $\frac{840\ \mathrm{L}}{1\ 400\ \mathrm{L}} = 0,6 = 60\ \%$ av tanken. Dette betyr at vannstanden er $60\ \%$ av høyden til tanken. Høyden til tanken er $1\ \mathrm{m}$, så vannstanden er $1\ \mathrm{m} \cdot 60\ \% = 0,6\ \mathrm{m}$, eller $60\ \mathrm{cm}$.

Svar: $0,6\ \mathrm{m} = 60\ \mathrm{cm}$.

c)

En annen dag familien reiser fra hytta, står vannet 10 cm høyt i beholderen. Når de kommer tilbake, står vannet 85 cm høyt.

Hvor mange millimeter har det regnet den tiden de var borte?

Løsningsforslag c)

Vannstanden i beholderen har økt med $85\text{ cm} - 10\text{ cm} = 75\text{ cm}$ i løpet av tiden familien var borte. Vi løser dette på to forskjellige måter. Den første måten er litt raskere, men den andre måten kan være lettere å forstå.

Vi starter med den første metoden. Vi vet at 12 mm nedbør gir 60 cm i vannstand. La tallet x betegne antall millimeter nedbør som gir 75 cm i vannstand. Siden vannstanden og mengde nedbør er proposjonale størrelser, har vi at

$$\frac{12}{60} = \frac{x}{75}.$$

Vi vil finne et tall x som passer inn i denne likningen; det gjør vi ved å multiplisere med 75 på begge sider av likhetstegnet, og forkorte.

$$\frac{12}{60} \cdot 75 = \frac{x}{75} \cdot 75,$$
$$\frac{12}{60} \cdot 75 = x.$$

Vi regner ut at $\frac{12}{60} \cdot 75 = 15$, så det regnet 15 mm på tiden familien var borte.

Så tar vi den andre metoden. Først finner vi ut hvor mye vann som har kommet i tanken i løpet av tiden de var borte. Vannstanden økte med $75\text{ cm} = 0,75\text{ m}$, og grunnflaten i tanken er på $1,4\text{ m}^2$, så mengden vann må være

$$0,75\text{ m} \cdot 1,4\text{ m}^2 = 1,05\text{ m}^3.$$

Vi skal altså finne ut hvor høy vannstanden på taket blir, hvis vi fordeler $1,05\text{ m}^3$ vann ut over taket, som er 70 m^2. Det må være

$$\frac{1,05\text{ m}^3}{70\text{ m}^2} = 0,015\text{ m},$$

eller 15 mm. Det betyr at det regnet 15 mm på tiden familien var borte (akkurat som før).

Svar: $\underline{\underline{15\text{ mm}.}}$

Oppgave 4 (8 poeng) Nettkode: E-4AK9

Funksjonen h gitt ved

$$h(t) = 3{,}25t^3 - 50t^2 + 170t + 700$$

var en god modell for hjortebestanden i en kommune i perioden 1990–2000.

Ifølge modellen var det $h(t)$ hjort i kommunen t år etter 1. januar 1990.

a)
Tegn grafen til h for $0 \leq t \leq 10$

Løsningsforslag a)

Vi skal tegne grafen til h der $0 \leq t \leq 10$, altså i et gitt intervall. Det gjør vi ved å bruke funksjonen

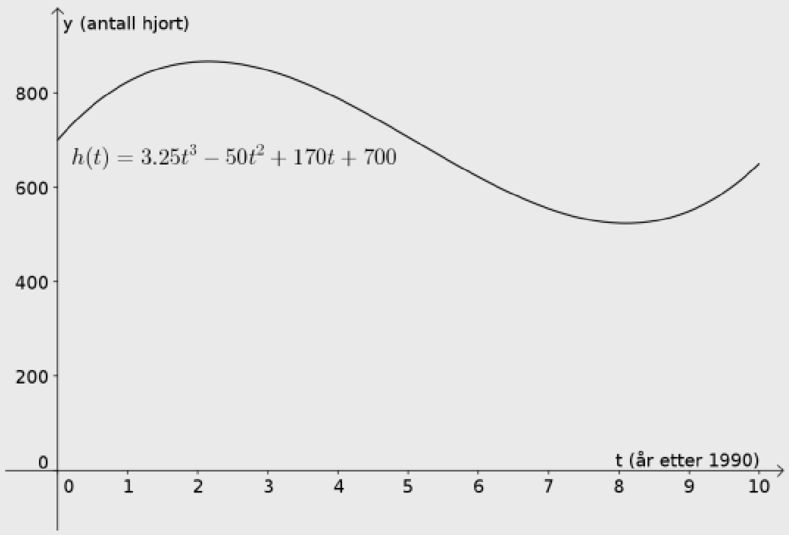
```
Funksjon[ <Funksjon>, <Start>, <Slutt> ]
```

Vi skriver

```
h = Funksjon[3.25*t^3 - 50*t^2 + 170*t + 700, 0, 10]
```

i "Skriv inn"-feltet. Vi må huske å sette navn på aksene: -aksen (i dette tilfellet -aksen) symboliserer tiden i år etter 1. januar 1990, og -aksen symboliserer hjortebestanden, altså antall hjort. Deretter må vil tilpasse aksene slik at vi ser hele funksjonen. Det området vi er intessert i er der er mellom 0 og 10, og der er mellom 0 og (ca.) 1 000. Resultatet er vist under.

Svar:



b)
Når var hjortebestanden størst, og hvor mange hjort var det i kommunen da?

Løsningsforslag b)

For å finne toppunktet til polynomer, slik som h, bruker vi funksjonen

```
Ekstremalpunkt[ <Polynom> ]
```

Alt vi trenger å gjøre er å skrive

```
Ekstremalpunkt[h]
```

i "Skriv inn"-feltet. Da får vi de to punktene $(2.15, 866.67)$ og $(8.11, 523.68)$. Vi ser på grafen at funksjonen er voksende for $h > 8.11$ men grafen viser også at funksjonsverdiene ikke vil bli større enn $h(2.15)$ for noen verdier av t mellom $8.11 \text{ og } 10.$ Det første punktet er toppunktet på grafen. Vi tolker det som at $2,15$ år etter 1. januar 1990, så var hjortebestanden på ca. 867. Vi vet at 2 år etter 1990 er 1992, og at $0,15$ år etter 1. januar er i senvinteren. Dermed konkluderer vi med at hjortebestanden var størst i senvinteren i 1992, og at bestanden da var på ca. 867.

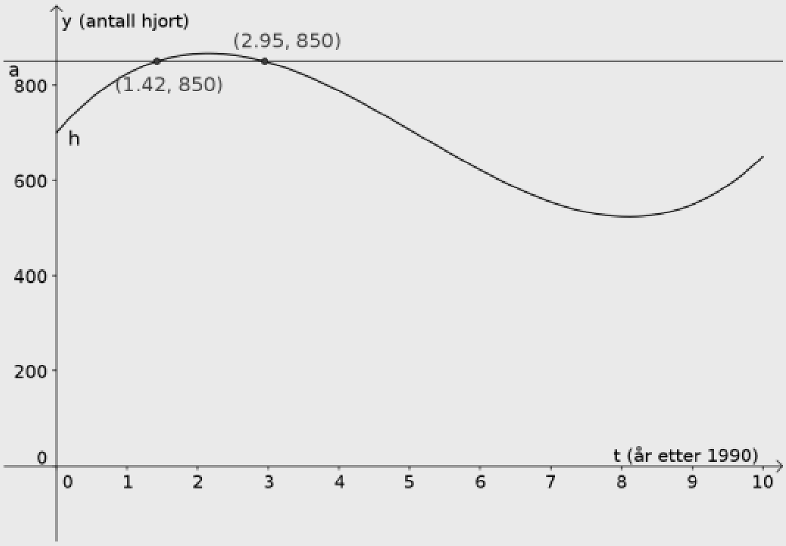
Svar: Hjortebestanden var størst i senvinteren i 1992 ($t = 2,15$), og den var da på ca. 867.

c)

Løs likningen $h\left(t\right) = 850$ grafisk, og forklar hva løsningen forteller om hjortebestanden.

Løsningsforslag c)

I den samme GeoGebra-filen vi tegnet grafen i, tegner vi linjen $y = 850$. Vi finner koordinatene til skjæringspunktene mellom linjen og grafen til h ved å trykke på dem. Resultatet er vist under.



Her ser vi at skjæringspunktene er $(1.42, 850)$ og $(2.95, 850)$. Da har vi at

$$h(1,42) = 850, \text{og } h(2,95) = 850,$$

så løsningene til ligningen $h(t) = 850$ er $t = 1,42$ og $t = 2,95$. Dette betyr at etter $1,42$ år og $2,95$ år er hjortebestanden lik 850. Det er i henholdsvis rundt mai 1991 og desember 1992.

Svar: Løsningene til ligningen er $t = 1,42$ og $t = 2,95$. Dette betyr at etter $1,42$ år og $2,95$ år er hjortebestanden lik 850. Det er i henholdsvis rundt mai 1991 og desember 1992

d)

Hvor stor var den gjennomsnittlige endringen i antall hjort per år i perioden

1. januar 1994–1. januar 1998?

Løsningsforslag d)

Den 1. januar 1994 er $t = 4$, og den 1. januar 1998 er $t = 8$. Derfor er $h(4)$ hjortebestanden den 1. januar 1994, og tilsvarende for $h(8)$ og 1998. Vi kan

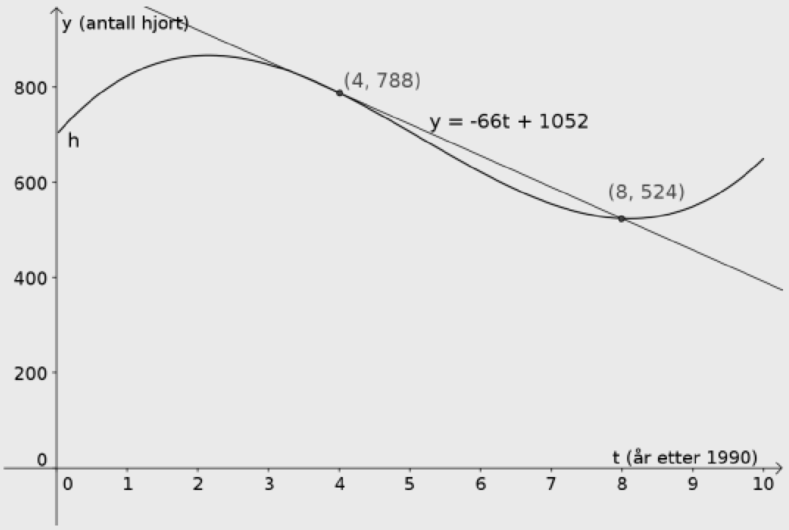
markere disse punktene i Geogebra ved å skrive

```
(4,h(4))
```

og

```
(8,h(8))
```

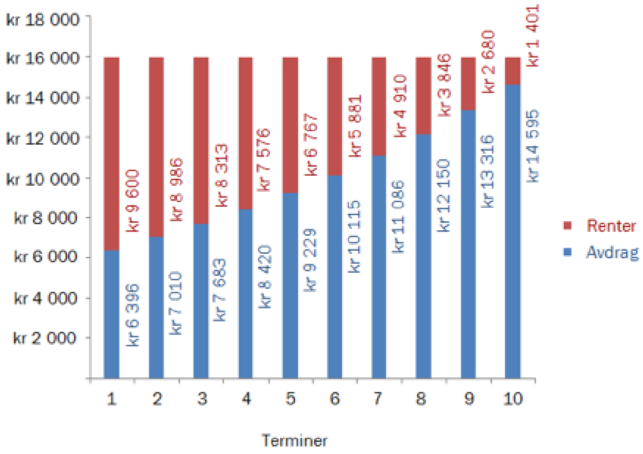
i "Skriv inn"-feltet. Deretter kan vi lage en rett linje mellom dem. I algebrafeltet høyreklikker vi på ligningen, og velger "$y = ax + b$" for å få ligningen på den kjente formen. Da ser vi at linjen har ligning $y = -66x + 1052$. Det betyr at den gjennomsnittlige endringen i hjortebestanden per år i perioden, var -66.



Vi kunne også regnet oss fram til dette ved å se at hjortebestanden den 1. januar i 1994 var $h(4) = 788$, og at den var $h(8) = 524$ den 1. januar 1998. Dermed endret bestanden seg med $524 - 788 = -264$ på 4 år, som blir en endring på $\frac{-264}{4} = -66$ per år.

Svar: -66.

Oppgave 5 (5 poeng) Nettkode: E-4ALE



Ovenfor ser du nedbetalingsplanen for et lån som betales ned i løpet av 10 terminer.Hver termin er 1 år. Renten i prosent er den samme i hele nedbetalingsperioden.

a)

Forklar hvilken type lån dette er.

Løsningsforslag a)

Høyden på stolpene i diagrammet sier hvor mye man betaler på lånet totalt i hver termin. Dette er summen av rentene man betaler, og det man betaler ned på lånebeløpet. Stolpene er like høye i hver termin, og det betyr at nedbetalingsplanen passer med et annuitetslån. I et serielån hadde de blå delene av stolpene, altså avdragene, vært like høye, mens totalhøyden på stolpene hadde blitt mindre i hver termin.

Svar: Annuitetslån.

b)

Hvor stort er det totale lånebeløpet?

Løsningsforslag b)

Et avdrag er det beløpet man betaler ned av det opprinnelige lånebeløpet. Legger vi sammen alle avdragene, får vi derfor det totale lånebeløpet. Avdragene er markert i blått i diagrammet. For eksempel var avdraget på $6\ 396\ \mathrm{kr}$ første termin. Summen av alle avdragene er

$$6\ 396\ \mathrm{kr} + 7\ 010\ \mathrm{kr} + 7\ 683\ \mathrm{kr} + 8\ 420\ \mathrm{kr} + 9\ 229\ \mathrm{kr} +$$

$$+10\ 115\ \mathrm{kr} + 11\ 086\ \mathrm{kr} + 12\ 150\ \mathrm{kr} + 13\ 316\ \mathrm{kr} + 14\ 595\ \ \mathrm{kr}$$

$$= 100\ 000\ \ \mathrm{kr}$$

Svar: $100\ 000\ \mathrm{kr}$.

c)

Hvor mange prosent er renten på?

Løsningsforslag c)

Ett år etter lånet startet, altså i første termin, skal man betale $9\ 600\ \mathrm{kr}$ i rente. Lånebeløpet var på $100\ 000\ \mathrm{kr}$, og det betyr at renten per år blir

$$\frac{9\ 600\ \mathrm{kr}}{100\ 000\ \mathrm{kr}} = 0,096 = 9,6\ \%.$$

Svar: $9,6\ \%$ rente per år.

Oppgave 6 (4 poeng) Nettkode: E-4ALK

En haug med tørr sand har form tilnærmet lik en kjegle. Radius i kjeglen er 1,5 ganger så stor som høyden i kjeglen.

a)
Bestem volumet av haugen med tørr sand dersom radius i kjeglen er 1,35 m.

Løsningsforslag a)

Volumet V til en kjegle med radius r og høyde h, er gitt ved $V = \frac{1}{3}\,\pi r^2 h$. Radien i kjeglen vår er $r = 1,35\ \mathrm{m}$. Radien er $1,5$ ganger større enn høyden h, så vi har at

$$1,5 \cdot h = 1,35\ \mathrm{m};$$

det må bety at

$$h = \frac{1,35\ \mathrm{m}}{1,5},$$

altså at høyden er lik $h = 0,9\ \mathrm{m}$. Vi setter inn dette i formelen for volumet, og får at $V = \frac{1}{3}\,\pi \cdot \left(1,35\ \mathrm{m}\right)^2 \cdot 0,9\ \mathrm{m} \approx 1,72\ \mathrm{m}^3,$ eller ca. $1\ 720\ \mathrm{L}$.

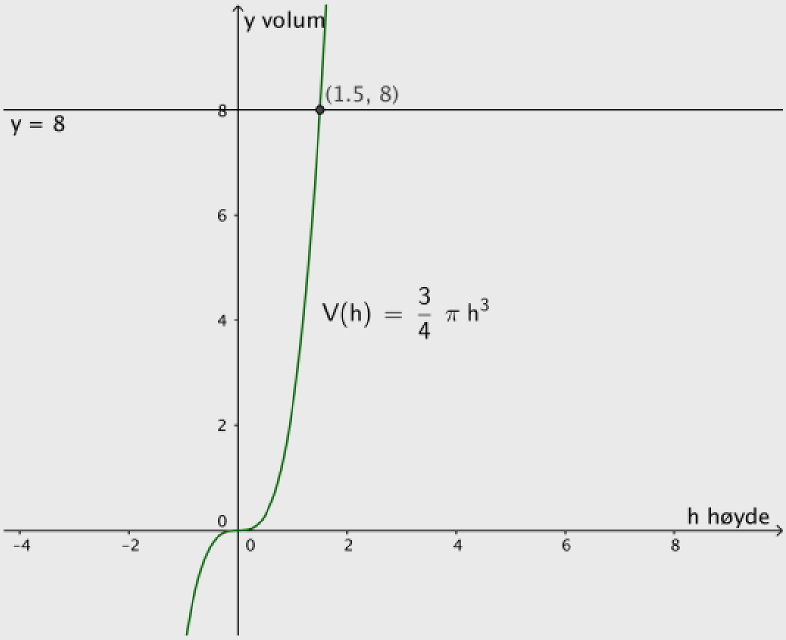
Vi kunne også ha regnet ut dette uten å finne høyden eksplisitt. Vi vet at r er $1,5$ ganger så stor som h, så $1,5 \cdot h = r$, eller $h = \frac{1}{1,5} r = \frac{2}{3} r$. Hvis vi setter dette inn i formelen for volum, får vi at $V = \frac{1}{3}\,\pi r^2 \cdot \left(\frac{2}{3} r\right) = \frac{2}{9}\,\pi r^3$. Setter vi inn $r = 1,35\ \mathrm{m}$, får vi $V = \frac{2}{9}\,\pi \left(1,35\ \mathrm{m}\right)^3 \approx 1,72\ \mathrm{m}^3$, akkurat som før.

Svar: Cirka $1,72\ \mathrm{m}^3 = 1\ 720\ \mathrm{L}$.

b)
Bestem hvor høy kjeglen er dersom haugen med sand har et volum på 8,0 m^3.

Løsningsforslag b)

Vi vet allerede at $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Vi vil gjerne ha et uttrykk som bare har med volumet V og høyden h å gjøre, så vi setter $r = \frac{3}{2}h$ inn i likningen. (Dette vet vi fordi $1,5 \cdot h = r$.) Da får vi at $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{2}h\right)^2 h = \frac{1}{3}\pi\frac{9}{4}h^3$, eller $V = \frac{3}{4}\pi h^3$. I denne oppgaven er $V = 8\ \mathrm{m}^3$. Vi bruker GeoGebra og for å løse disse to likningene grafisk.



Vi ser at punktet der de to grafene skjærer hverandre er i $h = 1{,}5$.

ALTERNATIV LØSNING

Svar: Cirka $1,5\ \mathrm{m}$.