Eksamensoppgavesettet er utarbeidet av Utdanningsdirektoratet. Avvik fra det originale eksamenssettet er eventuelle spesifiseringer og illustrasjoner. Løsningsforslagene i sin helhet er utarbeidet av matematikk.org.

Nettkoden brukes i søkefeltet på www.matematikk.org for å åpne oppgaven og se utfyllende løsningsforslag.

MAT0010 2015 VÅR

Eksamenstid:
5 timer totalt. Del 1 og Del 2 skal deles ut samtidig.

Del 1 skal du levere innen 2 timer.

Del 2 skal du levere innen 5 timer.

Hjelpemidler på Del 1:
Ingen hjelpemidler er tillatt, bortsett fra vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Hjelpemidler på Del 2:
Før Del 1 er levert inn, er ingen hjelpemidler tillatt, bortsett fra vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Etter at Del 1 er levert inn, er alle hjelpemidler tillatt, med unntak av Internett eller andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte og forklaring:
Del 1 har 16 oppgaver. Du skal svare på alle oppgavene. Skriv med penn når du krysser av eller fører inn svar i Del 1.

Del 2 har 9 oppgaver. Du skal svare på alle oppgavene.

I regneruter skal du vise hvordan du kommer fram til svaret.

Ved konstruksjon skal du bruke passer, linjal og blyant.

Du skal ikke kladde på oppgavearkene. Bruk egne kladdeark.

På flervalgsoppgavene setter du bare ett kryss per spørsmål.

Eksempel:

Uttrykket $3 \cdot (1 + 2 \cdot 2)^2$ har verdien

35	50	62	75
○	○	○	⊗

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.

Vis hvordan du har kommet fram til svarene.

Før inn nødvendige mellomregninger. Skriv med penn.

I regnearkoppgaver skal du ta utskrift av det ferdige regnearket. Husk å vise hvilke formler du har brukt i regnearket.

Du skal levere utskriften sammen med resten av besvarelsen.

Dersom du bruker en digital graftegner, skal skala og navn på aksene være med på utskriften.

Veiledning om vurderingen:
Den høyeste poengsummen i Del 1 er 24 og den høyeste poengsummen i Del 2 er

36, men den er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering på grunnlag av Del 1 og Del 2. Sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er kreativ og kan anvende fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinge

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng) Nettkode: E-4C40

Regn ut

a)
$395 + 1988 =$

Løsningsforslag a)

Vi setter opp tallene:

$$\begin{array}{r} 395 \\ +1988 \\ \hline = \\ \hline \end{array}$$

Vi starter med enerplassen. Summen av 5 og 8 er 13, så vi setter 3 på enerplassen, og flytter 1 opp til tierne:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 395 \\ +1988 \\ \hline = 3 \\ \hline \end{array}$$

Vi gjør det samme på tierplassen, hundreplassen og tusenplassen, og får:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1} \\ 395 \\ +1988 \\ \hline =2383 \\ \hline \end{array}$$

Svar: $\underline{\underline{2383}}$

b)
$572 - 479 =$

Løsningsforslag b)

Vi setter opp tallene over hverandre:

$$\begin{array}{r} 572 \\ -\ 479 \\ \hline = \\ \hline \end{array}$$

Vi starter med enerplassen. 9 er større enn 2, så vi må 'veksle' en tier fra tierplassen. Da får vi stykket $12 - 9 = 3$, så:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle -1} \\ 5\ 7\ 2 \\ -\ 4\ 7\ 9 \\ \hline = 3 \\ \hline \end{array}$$

På tierplassen blir stykket nå $6 - 7$, siden 7 er større enn 6 må vi 'veksle' en hundrer fra hundreplassen.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle -1\ -1} \\ 5\ 7\ 2 \\ -\ 4\ 7\ 9 \\ \hline = 9\ 3 \\ \hline \end{array}$$

Svar: $\underline{\underline{93}}$

c)
$102 \cdot 98 =$

Løsningsforslag c)

Vi setter opp regnestykket:

$102 \cdot 98 =$

Vi multipliserer ett og ett siffer fra faktoren til høyre inn i faktoren til venstre. Vi starter med å multiplisere inn 8:

$$\begin{array}{l} 102 \cdot 98 = \\ \hline 816 \end{array}$$

Nå multipliserer vi 9 med faktoren til venstre. Setter en null under sifferet lengst til høyre, for å markere at vi har flyttet oss fra enerplassen til tierplassen:

$$\begin{array}{r} 102\cdot 98 = \\ \hline 816 \\ +918\circ \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

Vi adderer tallene:

$$\begin{array}{r} 102\cdot 98 = \\ \hline 816 \\ +918\circ \\ \hline 9996 \\ \hline \end{array}$$

Svar: $\underline{\underline{9996}}$

d)
$81 : 0{,}27 =$

Løsningsforslag d)

Vi skriver divisjonsstykke som en brøk:

$$\frac{81}{0,27}$$

Ved å multiplisere med 100 over og under brøkstreken utvider vi brøken:

$$\frac{81\cdot 100}{0,27\cdot 100} = \frac{8100}{27}$$

Nå setter vi opp stykket:

$81 : 0{,}27 =$

Vi ser på sifferne i dividenden. Vi kan ikke dividere 8 med 27, så vi tar med neste siffer. Vi dividerer $81 : 27 = 3$. Vi skriver 3 i resultatet, og trekker fra 81:

$$\begin{array}{l} \;\; 8\,100:27 = 3 \\ -81\downarrow \\ \hline \;\;\; 00 \end{array}$$

Vi ser at $0 \cdot 27 = 0$, så vi setter 0 i resultatet:

$$
\begin{array}{l}
8\,1\,0\,0 : 27 = 300 \\
\underline{-8\,1\downarrow} \\
\underline{0\,0} \\
\underline{-\,0} \\
0
\end{array}
$$

Svar: $\underline{\underline{300}}$

ALTERNATIV LØSNING

Vi kan skrive divisjonsstykket som en brøk

$$\frac{8100}{27}$$

Vi faktoriserer telleren og nevneren, det vil si at vi skriver dem som produkt av primtall:

$$\frac{8100}{27} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{3 \cdot 3 \cdot 3}$$

Vi forkorter bort fellesfaktorer:

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 1} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 300$$

Legg merke til at vi ikke hadde trengt å primtallsfaktorisere 300.

Oppgave 2 (2 poeng) Nettkode: E-4C5E

Gjør om

a)
$98\ \text{km}\ = \_\_\_\_\_ \text{mil}$

Løsningsforslag a)

$98\ \text{km} = 98 \cdot 0,1\ \text{mil} = 9,8\ \text{mil}.$

Svar: $\underline{\underline{98\ \text{km}\ \text{er}\ 9{,}8\ \text{mil}.}}$

b)
$12{,}3\ \text{kg} = \_\_\_\_\_\ \text{hg}$

Løsningsforslag b)

$12,3\ \text{kg} = 12,3 \cdot 10\ \text{hg} = 123\ \text{hg}$

Svar: $\underline{\underline{12,3\ \text{kg}\ \text{er}\ 123\ \text{hg}.}}$

c)
$800\ \text{mL} = \_\_\_\_\_\ \text{L}$

Løsningsforslag c)

$800\ \text{mL} = 800 \cdot 0,001\ \text{L} = 0,8\ \text{L}$

Svar: $\underline{\underline{800\ \text{mL}\ \text{er}\ 0,8\ \text{L}.}}$

d)
$4\ \text{h}\ 12\ \text{min} = \_\_\_\_\_\ \text{h}$

Løsningsforslag d)

Her skriver vi $1\ \text{min} = \frac{1}{60}\ \text{h}$ som brøk for å slippe stygge tall, men du kan også bruke $1\ \text{min} = 0{,}0166\ \text{h}$.

$4\ \text{h}$ er allerede gitt, så vi må regne om $12\ \text{min}$ til timer.

$12\ \text{min} = 12 \cdot \frac{1}{60}\ \text{h} = \frac{12}{60}\ \text{h}$

Vi forkorter brøken ved å faktorisere:

$$\frac{12}{60} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Så legger vi sammen:

$$4 + 0{,}2 = \underline{4{,}2}$$

Svar: $4\ \text{h}\ 12\ \text{min}$ er $4{,}2\ \text{h}$**.**

Oppgave 3 (1 poeng) Nettkode: E-4C5J

a)

Skriv på standardform

$435\ 000$

Løsningsforslag a)

Vi flytter komma til vi bare har ett siffer før komma, og multipliserer med like mange tiere som antallet plasser vi flyttet komma.

$$435000 = 43500,0 \cdot 10 = 4350,00 \cdot 10^2 = \ldots = 4,35 \cdot 10^5$$

Svar: $\underline{\underline{4{,}35 \cdot 10^5}}$

b)

Faktoriser med primtall

105

Løsningsforslag b)

Når vi faktoriserer med primtall er det lurt å undersøke om vi kan dividere tallet på 2, også jobbe oss oppover med primtallene $3, 5, 7$ osv. Først prøver vi å dividere på primtallet 2:

$$105 : 2 = 52,5$$

Vi ser at dette ikke blir et helt tall, så 2 er ikke en faktor. Vi prøver oss frem og finner at:

$$105 = 3 \cdot 35$$

$$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Svar: $\underline{\underline{105 = 3 \cdot 5 \cdot 7}}$

Oppgave 4 (2 poeng) Nettkode: E-4C6R

Regn ut og forkort

a)
$\frac{3}{10} + \frac{2}{10} =$

Løsningsforslag a)

Først lager vi felles brøkstrek og adderer

$$\frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3+2}{10} = \frac{5}{10}$$

Så forkorter vi brøken:

$\frac{5}{10} = \frac{5}{2 \cdot 5} = \frac{1}{2}$

Svar: $\frac{1}{2}$

b)
$\frac{7}{12} - \frac{1}{3} =$

Løsningsforslag b)

Fordi $12 = 3 \cdot 4$, er 12 fellesnevner.

Vi utvider brøken til høyre ved å multiplisere med 4 over og under brøkstreken, og subtraherer tellerne:

$$\frac{7}{12} - \frac{1}{3} = \frac{7}{12} - \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{7-4}{12} = \frac{3}{12}$$

Vi forkorter brøken:

$\frac{3}{12} = \frac{3}{3 \cdot 4} = \frac{1}{4}$

Svar: $\frac{1}{4}$

c)

$\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} =$

Løsningsforslag c)

Vi skriver felles brøkstrek:

$$\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8 \cdot 3 \cdot 1}{9 \cdot 4 \cdot 2}$$

Først faktoriserer vi teller og nevner:

$$\frac{8 \cdot 3 \cdot 1}{9 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$$

Så forkorter vi fellesfaktorer:

$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{3}$

Svar: $\frac{1}{3}$

d)

$\frac{4}{5} : \frac{6}{15} =$

Løsningsforslag d)

Vi snur bakerste brøk og skriver felles brøkstrek:

$$\frac{4}{5} : \frac{6}{15} = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{6} = \frac{4 \cdot 15}{5 \cdot 6}$$

Vi faktoriserer teller og nevner, og forkorter fellesfaktorer:

$\frac{4 \cdot 15}{5 \cdot 6} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{2}{1} = 2$

Svar: 2

Oppgave 5 (1,5 poeng) Nettkode: E-4C89

Løs likningene

a)
$6x = 4x + 8$

Løs oppgaven her

Løsningsforslag a)

Vi har likningen:

$$6x = 4x + 8$$

Vi trekker fra $4x$ på begge sider av likhetstegnet:

$$6x - 4x = 8 + 4x - 4x$$

$$2x = 8$$

Vi dividerer med 2 på begge sider av likhetstegnet:

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$$

$$x = 4$$

Vi setter prøve på svaret:

$$\begin{aligned} \text{Venstre side } &= 6 \cdot 4 = 24 \\ \text{Høyre side } &= 4 \cdot 4 + 8 = 24 \end{aligned}$$

Svar: $x = 4$

b)
$\frac{x}{2} - \frac{x-2}{3} = 1$

Løs oppgaven her

Løsningsforslag b)

Vi skal løse likningen

$$\frac{x}{2} - \frac{x-2}{3} = 1$$

Vi ser at brøkene ikke har samme nevner, så vi starter med å finne fellesnevner. Her er den $2 \cdot 3 = 6$. Vi multipliserer alle ledd med 6:

$$\frac{x}{2} \cdot 6 - \frac{x-2}{3} \cdot 6 = 1 \cdot 6$$

Husk at minustegnet foran brøken gjelder for alle leddene i telleren. Vi setter en parentes rundt teller, så blir det lettere å se.

$$3x - (x-2) \cdot 2 = 6$$

$$3x - 2x + 4 = 6$$

Vi trekker sammen x-leddene, og subtraherer 4 på begge sider av likhetstegnet:

$$x + 4 - 4 = 6 - 4$$

$$x = 2$$

Vi setter prøve på svaret:

$\text{Venstre side } = \frac{2}{2} - \frac{2-2}{3} = 1$

$\text{Høyre side } = 1$

Svar: $\underline{\underline{x = 2}}$

ALTERNATIV LØSNING

Fellesnevner er 6. Vi skriver om brøkuttrykkene på venstre side:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-2}{3} = \frac{x \cdot 3}{2 \cdot 3} - \frac{(x-2) \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{3x}{6} - \frac{2 \cdot (x-2)}{6}$$

Husk å multiplisere *hele* uttrykket over brøkstreken med 2. Hvis vi tar en parentes rundt uttrykket blir det lettere å se. Nå setter vi inn i likningen:

$$\frac{3x}{6} - \frac{2 \cdot (x-2)}{6} = 1$$

$$\frac{3x}{6} - \frac{2 \cdot x - 2 \cdot 2}{6} = 1$$

$$\frac{3x - (2x-4)}{6} = 1$$

$$\frac{3x - 2x + 4}{6} = 1$$

Vi multipliserer med 6 på begge sider av likhetstegnet og forkorter:

$$\frac{x+4}{6} \cdot 6 = 1 \cdot 6$$

$$\frac{x+4}{1} = 6$$

$$x + 4 = 6$$

Vi trekker fra 4 på begge sider av likhetstegnet:

$$x + 4 - 4 = 6 - 4$$

$$x = 2$$

Oppgave 6 (0,5 poeng) Nettkode: E-4C8D

Målestokken på et kart er $1 \; : \; 50\,000$. Avstanden mellom et punkt A og et punkt B på kartet er $4{,}5 \text{ cm}$.

Avstanden mellom punktene er i virkeligheten

- ☐ $2\,250\,000 \text{ km}$
- ☐ $22\,500 \text{ km}$
- ☐ $22{,}5 \text{ km}$
- ☐ $2{,}25 \text{ km}$

Løsningsforslag

For å finne avstanden i virkeligheten multipliserer vi med 50000:

$$4,5 \text{ cm} \cdot 50000 = 225000 \text{ cm}$$

Vi gjør om fra cm til km. 100 cm er 1 m, så 1 cm er det samme som $0,01 \text{ m}$. 1000 m er 1 km, så 1 m er det samme som $0,001 \text{ km}$:

$$1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m} = 0,01 \cdot 0,001 \text{ km} = 0,00001 \text{ km}$$

Vi gjør om fra cm til km:

$$225000 \text{ cm} = 225000 \cdot 0,00001 \text{ km} = 2,25 \text{ km}$$

Svar: Avstanden er $2{,}25 \text{ km}$ i virkeligheten (alternativ 4).

Oppgave 7 (1 poeng) Nettkode: E-4C99

En vare koster 100 kr både i butikk A og i butikk B.

I butikk A blir prisen satt ned med 20% på fredag.

I butikk B blir prisen først satt ned med 10% på fredag, og deretter ned med 10% til på lørdag.

I hvilken butikk er varen billigst etter prisreduksjonene?

Løs oppgaven her

Løsningsforslag

Butikk A

Vi ønsker å finne 20% av 100 kr. Vi finner først hva ett prosent er, og multipliserer det med 20.

Vi dividerer med 100 for å finne 1%:

$$1\% = \frac{100}{100} \text{ kr} = 1 \text{ kr}$$

1% av 100 kr er 1 kr. Da er 20%:

$$20\% = 20 \cdot 1 \text{ kr} = 20 \text{ kr}$$

Prisen *settes ned* 20%, altså må vi trekke fra 20 kr:

$$\text{Ny pris} = 100 \text{ kr} - 20 \text{ kr} = 80 \text{ kr}$$

Butikk B

Først settes prisen ned 10%. Vi fant at 1% av 100 kr er 1 kr, så 10% blir:

$$10 \cdot 1 \text{ kr} = 10 \text{ kr}$$

Prisen settes ned 10%, så den nye prisen på fredag blir:

$$\text{Fredag} = 100 \text{ kr} - 10 \text{ kr} = 90 \text{ kr}$$

På fredag er prisen 90 kr. Nå settes prisen ned ytterligere 10%. Vi må finne ut hva 1% av 90 kr er, så vi dividerer 90 med 100:

$$1\% = \frac{90}{100} \text{ kr} = 0,9 \text{ kr}$$

1% av 90 kr er $0,9$ kr. 10% av 90 kr er:

$$10\% = 10 \cdot 0,9 \text{ kr} = 9 \text{ kr}$$

Prisen settes ned 10%, så den nye prisen på lørdag blir:

$\text{Lørdag} = 90 \text{ kr} - 9 \text{ kr} = 81 \text{ kr}$

Svar: Varen er billigst i butikk A etter prisreduksjonene.

Oppgave 8 (1,5 poeng) Nettkode: E-4C9B

Skriv så enkelt som mulig

a)

$2-2\,(2a+1)$

Løs oppgaven her

Løsningsforslag a)

Vi multipliserer ut parantesen. Vi må huske å multiplisere med *alle* ledd inne i parentesen.

$2-2(2a+1)$

$=2-2\cdot 2a-2\cdot 1$

$=2-4a-2$

$=-4a$

Svar: $\underline{\underline{-4a}}$

b)

$\frac{(2a-2b)(a+b)}{2a+2b}$

Løs oppgaven her

Løsningsforslag b)

Husk at kun **like** faktorer (tall/uttrykk som er multiplisert med andre) kan forkortes. Vi kan for eksempel forkorte bort 2:

$\frac{4}{14}=\frac{2\cdot 2}{2\cdot 7}=\frac{2}{7}$

Men vi kan ikke forkorte $\frac{3+4}{3}$ fordi 3 ikke er i alle leddene i telleren.

$$\frac{(2a-2b)(a+b)}{2a+2b}$$

Vi trekker faktoren 2 ut av uttrykket i telleren:

$$2a-2b=2\cdot(a-b)$$

og uttrykket i nevneren:

$$2a+2b=2\cdot(a+b)$$

Vi setter det inn i uttrykket:

$$\frac{(2a-2b)(a+b)}{2a+2b}=\frac{2\cdot(a-b)\cdot(a+b)}{2\cdot(a+b)}$$

Forkort fellesfaktoren 2:

$=\frac{2\cdot(a-b)\cdot(a+b)}{2\cdot(a+b)}$

$=\frac{(a-b)\cdot(a+b)}{(a+b)}$

Forkort fellesfaktoren $(a+b)$:

$=\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)}=\frac{(a-b)}{1}=(a-b)$

Svar: $a-b$

Oppgave 9 (1,5 poeng) Nettkode: E-4C9G

Thomas har disse 4 filmene:


Avatar Hobbiten Gravity Hunger Games

Thomas trekker tilfeldig én film.

a)
Bestem sannsynligheten for at Thomas trekker Avatar.

Løsningsforslag a)

Det er 4 filmer å trekke fra, det er altså 4 mulige utfall. Det er én måte Thomas kan trekke *Avatar* på, så antall gunstige utfall er 1:

$\mathrm{P}\left(Avatar\right) = \frac{1}{4}$

Svar: Sannsynligheten for å trekke *Avatar* er $\frac{1}{4}$.

b)
Thomas trekker tilfeldig 2 av de 4 filmene og tar dem med til Markus.

Markus sier: «Jeg så *Gravity* i går, så jeg håper du ikke tok med den filmen.»

Bestem sannsynligheten for at Thomas har tatt med *Gravity*.

Løs oppgaven her

Løsningsforslag b)

Begge har $\frac{1}{4}$ sannsynlighet for å være *Gravity*. Da er sannsynligheten for å trekke *Gravity*:

$$\mathrm{P}\left(Gravity\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Svar: Sannsynligheten for at han har tatt med *Gravity* er $\frac{1}{2}$.

Oppgave 10 (0,5 poeng) Nettkode: E-4CAU

Formelen for volumet av en rett kjegle er $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Formelen for høyden h i kjeglen er

- ☐ $h = \frac{V \pi r^2}{3}$
- ☐ $h = 3V\pi r^2$
- ☐ $h = \frac{\pi r^2}{3V}$
- ☐ $h = \frac{3V}{\pi r^2}$

Løsningsforslag

Vi skriver om formelen slik at det står h er lik:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Vi multipliserer med 3 på begge sider av likhetstegnet:

$$3 \cdot V = \frac{\pi r^2 h}{3} \cdot 3$$

Vi forkorter:

$$3V = \pi r^2 h$$

Vi bytter plass på uttrykkene, slik at h står på venstre side av likhetstegnet:

$$h \cdot \pi r^2 = 3V$$

Vi dividerer med πr^2 på begge sider av likhetstegnet:

$$h = \frac{3V}{\pi r^2}$$

Svar: Formelen for høyden er $h = \frac{3V}{\pi r^2}$ (alternativ 4).

Oppgave 11 (1 poeng) Nettkode: E-4CAX

Marius er halvparten så gammel som Gabriel. Andreas er tre år eldre enn Gabriel. Til sammen er de tre guttene 53 år.

Lag en likning, og bruk denne til å regne ut hvor gammel hver av guttene er.

Løs oppgaven her

Løsningsforslag

Marius, som vi kaller M, er halvparten så gammel som Gabriel, som vi kaller G:

$$M = \frac{G}{2}$$

Andreas, som vi kaller A, er 3 år eldre enn Gabriel:

$$A = G + 3$$

Tilsammen er guttene 53 år:

$$M + G + A = 53$$

Vi har tre likninger med tre ukjente. Vi kan sette sammen disse likningene, og få én likning.

OBS! Når du har flere likninger med flere ukjente, må du ha *minst like mange* likninger som ukjente for å få et entydig svar.

Vi setter uttykkene for Marius og Andreas inn i uttrykket for den totale alderen:

$$M + A + G = 53$$

$$\left(\frac{G}{2}\right) + \left(G + 3\right) + G = 53$$

Denne likningen har G som ukjent.

$$\frac{G}{2} + G + 3 + G = 53$$

Vi multipliserer alle ledd med 2:

$$\frac{G}{2} \cdot 2 + G \cdot 2 + 3 \cdot 2 + G \cdot 2 = 53 \cdot 2$$

Vi forkorter:

$$G + 2G + 6 + 2G = 106$$

Vi trekker sammen G-leddene og trekker fra 6 på begge sider av likhetstegnet:

$$5G + 6 - 6 = 106 - 6$$

$$5G = 100$$

Vi dividerer med 5 på begge sider av likhetstegnet:

$$\frac{5G}{5} = \frac{100}{5}$$

$$G = 20$$

Gabriel er 20 år. Vi setter det inn i utrykkene for de andre:

$$M = \frac{G}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

$$A = G + 3 = 20 + 3 = 23$$

Svar: Gabriel er 20 år, Marius er 10 år og Andreas er 23 år.

Oppgave 12 (1 poeng) Nettkode: E-4CBB

Nedenfor ser du vekten til 4 av spillerne i Chelsea Football Club.

$91\ \text{kg}$ $91\ \text{kg}$ $74\ \text{kg}$ $90\ \text{kg}$

a)

Gjennomsnittsvekten for de 4 spillerne er _____ kg.

Løsningsforslag a)

Løsning: Først finner vi summen av vektene

$$\begin{array}{r} 91 \\ +\ 91 \\ +\ 74 \\ +\ 90 \\ \hline =346 \\ \hline \end{array}$$

Nå dividerer vi summen på antall spillere, altså 4:

$$\begin{array}{l} 346 : 4 = 86{,}5 \\ -32\downarrow \\ \hline \ \ 26 \\ -24\downarrow \\ \hline \ \ \ \ 20 \\ \ \ -20 \\ \hline \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

Hvor 0 vi setter bak 2 kommer av at vi setter komma etter 86.
Gjennomsnittsvekten er $86,5\ \text{kg}$.

Svar: Gjennomsnittsvekten er $86{,}5\ \text{kg}$.

b)

Medianvekten for de 4 spillerne er _____ kg.

Løsningsforslag b)

Vi skriver opp tallene i stigende rekkefølge

$74\ \mathrm{kg}\ \ 90\ \mathrm{kg}\ \ 91\ \mathrm{kg}\ \ 91\ \mathrm{kg}$

Medianen er gjennomsnittet av 90 og 91, altså summen av dem dividert med 2. Vi starter med å finne summen:

$$\begin{array}{r} 90 \\ +\ 91 \\ \hline =181 \\ \hline \end{array}$$

Vi dividerer med 2:

$$\begin{array}{l} \ \ 181 : 2 = 90{,}5 \\ -180\downarrow \\ \hline \quad\ \ 1\ 0 \\ \quad -1\ 0 \\ \hline \qquad\ \ 0 \end{array}$$

Medianvekten er $90,5\ \mathrm{kg}$.

Svar: Medianvekten er $\underline{\underline{90{,}5\ \mathrm{kg}}}$**.**

Oppgave 13 (2,5 poeng) Nettkode: E-4CBS

a)

Løs likningssystemet ved regning

$2x + y = 5$
$x - y = -2$

Løs oppgaven her

Løsningsforslag a)

Vi har likningene:

$2x + y = 5 \ \text{(likning I)}$
$x - y = -2 \ \text{(likning II)}$

Dette likningssettet kan løses ved addisjonsmetoden. Vi legger likning I til likning II:

$$x - y + 2x + y = -2 + 5$$

$$x + 2x + 3$$

$$3x = 3$$

Vi dividerer med 3 på begge sider av likhetstegnet:

$$\frac{3x}{3} = \frac{3}{3}$$

$$\frac{x}{1} = 1$$

$$x = 1$$

Vi setter inn 1 for x i likning I:

$$2x + y = 5$$

$$2 \cdot 1 + y = 5$$

$$y + 2 = 5$$

Vi trekker fra 2 på begge sider av likhetstegnet:

$$y + 2 - 2 = 5 - 2$$

$$y = 3$$

Svar: $x = 1$ og $y = 3$

ALTERNATIV LØSNING

Likningssettet kan også løses ved innsettingsmetoden. Vi skriver om likning I slik at den gir et uttrykk for y:

$$2x + y = 5$$

$$2x - 2x + y = 5 - 2x$$

$$y = 5 - 2x$$

Vi setter uttykket for y inn i likning II:

$$x - y = -2$$

$$x - (5 - 2x) = -2$$

$$x - 5 + 2x = -2$$

$$3x - 5 = -2$$

Adderer 5 på begge sider av likhetstegnet:

$$3x - 5 + 5 = -2 + 5$$

$$3x = 3$$

Dividerer med 3 på begge sider av likhetstegnet:

$$\frac{3x}{3} = \frac{3}{3}$$

$$x = 1$$

Vi setter inn 1 for x i likning I:

$$y = 5 - 2x$$

$$y = 5 - 2 \cdot 1$$

$$y = 3$$

b)

Løs likningssystemet ovenfor grafisk. Marker løsningen i koordinatsystemet.

Løsningsforslag b)

Vi skriver om likning I slik at det står y er lik:

$$2x + y = 5$$

Vi trekker fra $2x$ på begge sider av likhetstegnet:

$$2x - 2x + y = 5 - 2x$$

$$y = -2x + 5$$

Konstantleddet er 5 og stigningstallet er -2.

Vi skriver om likning II:

$$x - y = -2$$

$$-2 = x - y$$

Vi legger til y på begge sider av likhetstegnet:

$$-2 + y = x - y + y$$

Vi legger til 2 på begge sider av likhetstegnet:

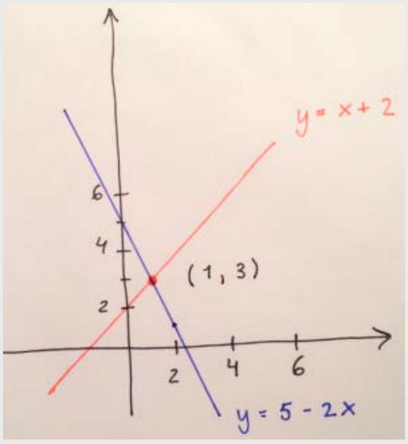
$$y - 2 + 2 = x + 2$$

$$y = x + 2$$

Vi lager verditabeller for begge funksjoner:

$$y = x + 2\colon \begin{bmatrix} x & y & (x,y) \\ 0 & 2 & (0,2) \\ 1 & 3 & (1,3) \\ 2 & 4 & (2,4) \\ 3 & 5 & (3,5) \end{bmatrix}, \qquad y = 5 - 2x\colon \begin{bmatrix} x & y & (x,y) \\ 0 & 5 & (0,5) \\ 1 & 3 & (1,3) \\ 2 & 1 & (2,1) \\ 3 & -1 & (3,-1) \\ 4 & -3 & (4,-3) \end{bmatrix}$$

Vi tegner grafene og leser av skjærngspunktet $(x, y) = (1, 3)$.



Svar: Grafene har skjæringspunkt $(1{,}3)$.

Oppgave 14 (3 poeng) Nettkode: E-4CC3

Konstruer ΔABC der $\angle A = 30^\circ$, $AB = 7{,}0 \text{ cm}$ og $AC = 7{,}0 \text{ cm}$.

ΔABCer en del av $ABCD$ der $\angle ACD = 45^\circ$ og $AD \| BC$.

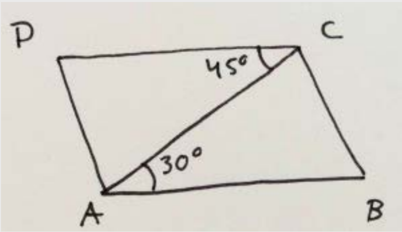
Konstruer trapeset $ABCD$.

Lag hjelpefigur og skriv en kort konstruksjonsforklaring.

Løs oppgaven her

Løsningsforslag

Hjelpefigur:



Konstruksjonsforklaring:

1. Sett av punktet A, og sett av punktet B 7 cm fra A.
2. Konstruer 60° i A, og halver vinkelen.
3. Sett av punktet C 7 cm fra A på det nye vinkelbeinet.
4. Trekk linjen BC.
5. Konstruer 90° i C på AC, og halver vinkelen.

   Sidene BC og AD skal være parallelle. Det vil si at vinklene $\angle ABC$ og $\angle BAD$ er nabovinkler (vinkler som tilsammen utgjør 180°). Vi ønsker å finne vinkelen $\angle BAD$, som må være like stor som 180° - $\angle ABC$:.

   Vinkelsummen i en trekant er 180° , og trekanten ABC er en likebeint trekant. $\angle A = 30^\circ$, vi kan finne vinkel $\angle ABC$:

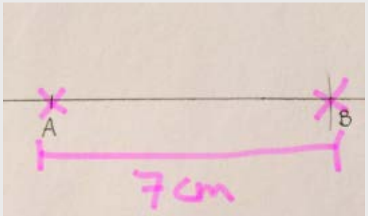
   $180^\circ - 30^\circ = 2 \cdot \angle ABC$

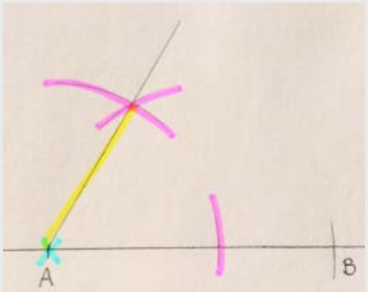
$\angle ABC = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$

Så vinkelen $\angle BAD$ må være $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

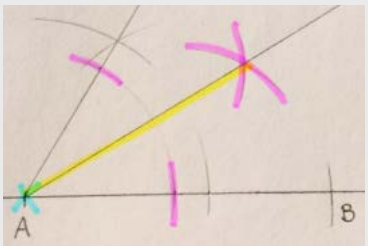
6. Konstruer 90° i A. Konstruer 60° på vinkelen, og halver to ganger, først til 30°, så til 15°.
7. Sett av punktet D der øvre vinkelbein til den nye vinkelen i A møter øvre vinkelbein til $\angle C$.

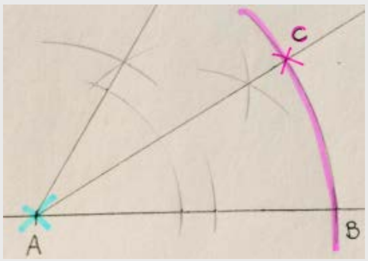
Under viser vi skritt for skritt hvordan figuren er konstruert, mens du vil vise alt dette i en og samme figur i din eksamensbesvarelse. Sett passerspissen i det blå krysset, slå de lilla linjene med passeren og trekk de gule linjene med blyant og linjal.



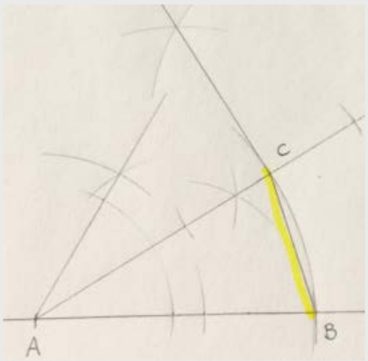


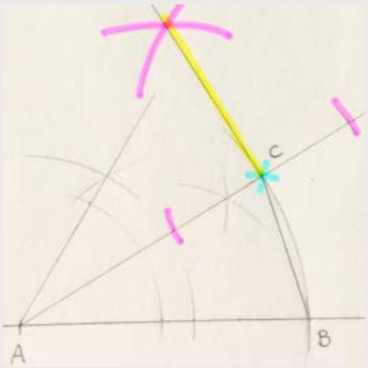
1. Vi markerer et punkt som ligger $7\ \mathrm{cm}$ fra A på linjen.
2. Vi konstruerer 60° i A.



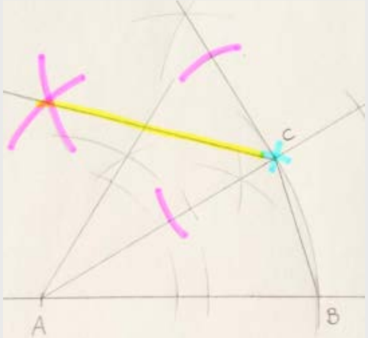


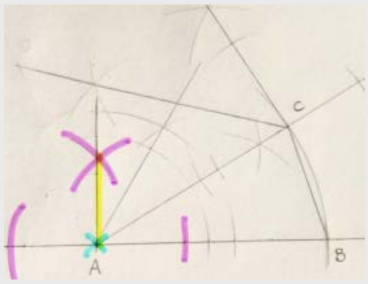
3. Vi halverer vinkelen.
4. Vi bruker passeren og markerer et punkt som ligger $7\ \mathrm{cm}$ fra A.





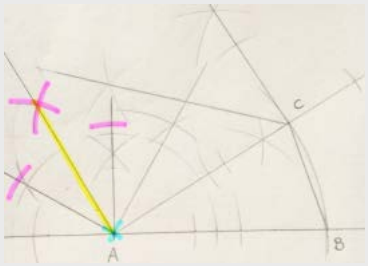
5. Vi trekker linjen mellom punktene B og C.
6. Vi konstruer 90° i punktet C.





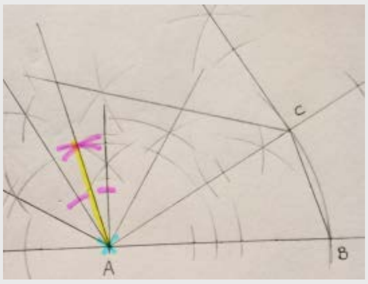
7. Vi halverer vinkelen.

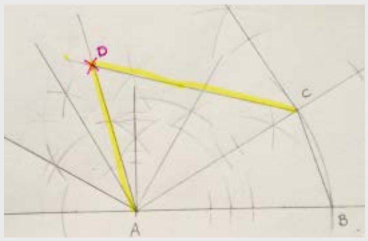
8. Vi konstruerer 90° i A.



9. Vi konstruerer 60° på vinkelbeinet.

10. Vi halverer vinkelen.

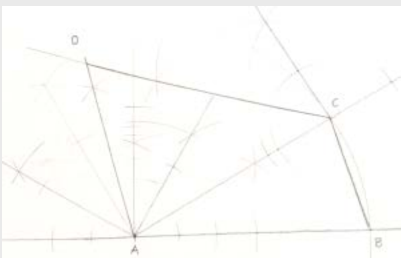




11. Vi halverer vinkelen enda en gang.

12. Vi setter av punktet D der vi ser at vinkelbeina møtes.

Konstruksjon:



Oppgave 15 (2 poeng) Nettkode: E-4CCS

En bonde har $180\ \mathrm{m}$ gjerde. Med det vil han lage et beiteområde. Bonden vil gi beiteområdet en av formene som er vist på skissene nedenfor.

Kvadrat

Sirkel

Bonden ønsker at beiteområdet skal ha størst mulig areal.

Bestem ved regning hvilken av disse to formene på beiteområdet han bør velge.

Bruk at $\pi \approx 3$.

Løs oppgaven her

Løsningsforslag

Vi starter med **kvadratet**. Formelen for omkretsen av et kvadrat med sidelengder s er:

$$O = 4s$$

Formelen for arealet av et kvadrat med sidelengder s er:

$$A = s^2$$

Vi skriver om formelen for omkretsen slik at det står s er lik:

$$O = 4s$$

Vi dividerer med 4 på begge sider av likhetstegnet:

$$\frac{4s}{4} = \frac{O}{4}$$

$$s = \frac{O}{4}$$

Vi setter inn 180 m for omkretsen:

$s = \frac{180}{4}\ \mathrm{m} = 45\ \mathrm{m}$

Arealet av kvadratet får vi ved å sette inn $45\ \mathrm{m}$ for s i formelen for arealet:

$A = 45^2\ \mathrm{m}^2 = 45 \cdot 45\ \mathrm{m}^2$

Vi setter opp multiplikasjonsstykket:

$$
\begin{array}{r}
45 \cdot 45 = 2025 \\
\hline
225 \\
+1800 \\
\hline
2025 \\
\hline
\end{array}
$$

Nå ser vi på **sirkelen**. Formelen for omkretsen av en sirkel med radius r er:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi$$

Formelen for arealet av en sirkel med radius r er:

$$A = \pi r^2$$

Vi skriver om formelen for arealet av en sirkel slik at det står r er lik:

$$2 \cdot r \cdot \pi = O$$

Vi dividerer med 2π på begge sider av lihetstegnet:

$$\frac{2\pi r}{2\pi} = \frac{O}{2\pi}$$

$$\frac{r}{1} = \frac{O}{2\pi}$$

$$r = \frac{O}{2 \cdot \pi}$$

Vi setter inn 180 m for omkretsen, og 3 for π:

$$r = \frac{180}{2 \cdot 3} \text{ m} = \frac{6 \cdot 30}{6} \text{ m} = \frac{\cancel{6} \cdot 30}{\cancel{6} \cdot 1} \text{ m} = 30 \text{ m}$$

Her har vi faktorisert telleren slik at $180 = 6 \cdot 30$, og forkortet fellesfaktoren 6 i telleren og nevneren.

Radius er 30 m. Vi setter inn 30 m for r og 3 for π i formelen for arealet av en sirkel:

$$A = 3 \cdot 30^2 \text{ m}^2 = 3 \cdot \left(3 \cdot 10\right)^2 \text{ m}^2 = 3 \cdot 3^2 \cdot 10^2 \text{ m}^2 = 3 \cdot 9 \cdot 100 \text{ m}^2 = 2700 \text{ m}^2$$

Arealet av sirkelen er 2700 m^2, og arealet av kvadratet er 2025 m^2. Det sirkelformede beiteområdet har størst areal.

Svar: Bonden bør velge sirkelformet beiteområde.

Oppgave 16 (1 poeng) Nettkode: E-4CD5

Bonden tenker også på å bruke gjerdet på $180\ \mathrm{m}$ til å lage et beiteområde med form som en likesidet trekant. Se skissen nedenfor.

Likesidet trekant

Vis at arealet til beiteområdet kan skrives som $A = 900\sqrt{3}\ \mathrm{m}^2$.

Hint: $\sqrt{2700} = 30\sqrt{3}$

Løs oppgaven her

Løsningsforslag

Formelen for omkretsen av en likesidet trekant med sider s er:

$$O = 3 \cdot s$$

Vi skriver om formelen for å finne et uttrykk for sidene s:

$O = 3s$

Vi dividerer med 3 på begge sider av likhetstegnet:

$\frac{O}{3} = \frac{3\cdot 3}{3\cdot 1}$

$s = \frac{O}{3}$

Vi setter inn 180 for omkretsen O og finner sidelengdene:

$s = \frac{180}{3}$

$s = 60$

Sidene er 60 m lange. Vi bruker Pytagoras læresetning for å finne høyden i trekanten:

$$\text{katet}^2 + \text{katet}^2 = \text{hypotenus}^2$$

Hypotenusen er $60\ \mathrm{m}$, og den ene kateten er $30\ \mathrm{m}$, så:

$\text{høyde}^2 = 60^2 - 30^2$

$\text{høyde} = \sqrt{3600 - 900}$

$\text{høyde} = \sqrt{2700}$

$\text{høyde} = 30\sqrt{3}$

Formelen for arealet av en trekant er:

$$A = \frac{1}{2}h \cdot l$$

Så arealet av trekanten er:

$A = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 30\sqrt{3}$

$A = 900\sqrt{3}$

Svar: Arealet er $900\sqrt{3}$.

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng) Nettkode: E-4CGL

På «Bondens marked» selger bonden varer direkte til kundene.

Vare	**Pris**
Poteter, løsvekt ($1\ \text{kg}$)	$10{,}00\ \text{kr}$
Poteter, sekk ($5\ \text{kg}$)	$45{,}00\ \text{kr}$
Blomkål (per stk.)	$12{,}50\ \text{kr}$
Gulrøtter, løsvekt ($1\ \text{kg}$)	$12{,}00\ \text{kr}$
Gulrøtter, sekk ($10\ \text{kg}$)	$90{,}00\ \text{kr}$
Gårdsegg (1 brett med 20 egg)	$40{,}00\ \text{kr}$

Miriam kjøper $3{,}5\ \text{kg}$ poteter i løs vekt, 2 stk. blomkål og 1 sekk med $10\ \text{kg}$ gulrøtter.

a)
Regn ut hva Miriam må betale til sammen for disse varene.

Løsningsforslag a)

La oss se på denne skritt for skritt.

Miriam kjøper $3,5\ \text{kg}$ poteter, til $10{,}00\ \text{kr}$ per kilo.

Miriam kjøper 2 stk blomkål, til $12,50$ kr per stk.

Miriam kjøper 1 sekk med $10\ \text{kg}$ poteter, til $90{,}00$ kr per sekk.

Summen av disse blir

$$3,5\,\text{kg}\cdot 10{,}00\,\frac{\text{kr}}{\text{kg}} + 2\,\text{stk}\cdot 12,50\,\frac{\text{kr}}{\text{stk}} + 1\,\text{sekk}\cdot 90{,}00\,\frac{\text{kr}}{\text{sekk}}$$

$$= 35{,}00\,\text{kr} + 25{,}00\,\text{kr} + 90{,}00\,\text{kr} = 150{,}00\,\text{kr}$$

Bruker du regneark, får du følgende:

	A	B	C	D
1		Antall	Pris per kilo eller stykk	Sum
2	Poteter i løs vekt	3,5	10,00	35
3	Blomkål	2	12,50	25
4	Potetsekk	1	90,00	90
5				150
6				
7				

FORMELUTSKRIFT:

	A	B	C	D
1		Antall	Pris per kilo eller stykk	Sum
2	Poteter i løs vekt	3,5	10	=B2*C2
3	Blomkål	2	12,5	=B3*C3
4	Potetsekk	1	90	=B4*C4
5				=SUM(D2:D4)
6				

Svar: $\underline{\underline{150{,}00\ \text{kr}}}$

b)
Mikael kjøper gulrøtter (i løs vekt) og 1 brett med gårdsegg. Han betaler i alt $100{,}00\ \mathrm{kr}$.

Regn ut hvor mange kilogram gulrøtter (i løs vekt) Mikael kjøper.

Løsningsforslag b)

Mikael kjøper 1 brett med gårdsegg, til $40\ \mathrm{kr}$ per brett.

Mikael kjøper $x\ \mathrm{kg}$ gulrøtter, til $12\ \mathrm{kr}$ per kg.

Han betaler $100\ \mathrm{kr}$ tilsammen.

Dette kan vi sette opp som en likning. For å få en mer oversiktlig likning tar vi ikke med oss benevningen, men husk at x har benevning kg.

$$1 \cdot 40 + x \cdot 12 = 100$$

Vi trekker fra 40 på begge sider av likhetstegnet:

$$40 - 40 + 12x = 100 - 40$$

$$12x = 60$$

Vi dividerer med 12 på begge sider av likhetstegnet:

$$\frac{12x}{12} = \frac{60}{12}$$

$$x = 5$$

Mikael kjøper $5\ \mathrm{kg}$ gulrøtter i løsvekt. Vi må oppgi svaret med to desimaler fordi tallene i oppgaven har to desimaler.

Svar: $\underline{\underline{5{,}00\ \mathrm{kg}}}$

Oppgave 2 (3 poeng) Nettkode: E-4CGP

Forhjulet på en traktor har diameter $d = 24"$ (tommer). $1" \approx 2{,}54 \text{ cm}$.

a)

Regn ut omkretsen til forhjulet. Oppgi svaret i centimeter.

Løsningsforslag a)

Formelen for omkretsen av en sirkel med radius r er

$$O = 2\pi r$$

Diameteren i hjulet er $d = 24$" tommer, og diameter er det samme som radius multiplisert med 2. Vi setter dette inn i formelen:

$$O = 2\pi r = \pi \cdot 2r = \pi d$$
$$O = \pi \cdot 24" \approx 75,39"$$

Resultatet er rundet av til to desimaler. Nå gjør vi om svaret til cm. Èn tomme " er ca. $2,54 \text{ cm}$, så

$$75,39" \approx 75,39 \cdot 2,54 \text{ cm} \approx 191{,}49 \text{ cm}$$

Svar: Omkretsen av forhjulet er $\underline{\underline{191{,}49 \text{ cm}}}$.

b)

Når forhjulet har gått $3{,}0$ ganger rundt, har bakhjulet gått $1{,}7$ ganger rundt.

Regn ut diameteren til bakhjulet. Oppgi svaret i tommer.

Løsningsforslag b)

Du kan tenke deg omkretsen til et hjul som et tau vi har surret rundt hjulet én gang. Hvis vi strekker ut tauet på bakken, ser vi hvor langt hjulet kommer når det går rundt én gang.

Bakhjulet og forhjulet har beveget seg like langt. De har beveget seg $3 \cdot$ omkretsen til **forhjulet**.

$\text{Lengde} = 3 \cdot O = 3 \cdot 191,49 \text{ cm} = 574,47 \text{ cm}$

Bakhjulet har bare gått rundt $1,7$ gang. Vi vet at lengden den har beveget seg er $574,47 \text{ cm}$. Vi setter opp en ligning:

$$\text{Lengde} = 1,7 \cdot \text{Omkrets}$$

$\text{Omkrets} = \frac{\text{Lengde}}{1{,}7} = \frac{574{,}47}{1{,}7} \text{ cm} = 337,92 \text{ cm}$

Nå vet vi omkretsen til bakhjulet. Vi bruker formelen fra a) for å finne diameter. Vi skriver om formelen slik at det står d er lik:

$O = \pi d$

$$\pi d = O$$

Dividerer med π på begge sider av likhetstegnet:

$$\frac{\pi d}{\pi} = \frac{O}{\pi}$$

$$\frac{d}{1} = \frac{O}{\pi}$$

$$d = \frac{O}{\pi}$$

Vi setter inn $337,92 \text{ cm}$ for O og regner ut.

$d = \frac{337{,}92}{\pi} \text{ cm} = 107,56 \text{ cm}$

Nå har vi diameteren i cm. $1''$ er $2,54 \text{ cm}$, så 1 cm er det samme som $\frac{1}{2{,}54}''$. Vi gjør om diameteren til tommer $''$:

$d = 107,56 \text{ cm} = \frac{107{,}56}{2{,}54}'' = 42,35''$

Svar: Diameteren til bakhjulet er 42,35".

Oppgave 3 (5 poeng) Nettkode: E-4CGT

Oppgave 3 skal løses ved hjelp av regneark. Vis hvilke formler du har brukt.

Isak vil bygge et kyllingfjøs og får et serielån i banken. Lånebeløpet er $3\,600\,000$ kr . Han vil betale ned lånet med én termin per år i 10 år. Renten er $4{,}0\%$ per år. Nedenfor ser du et oppsett for nedbetalingsplanen fra banken. Alle beløp er oppgitt i kroner.

	A	B	C	D	E
1	Lånebeløp (kroner)	3600000			
2	Antall terminer (år)	10			
3	Rente per år	4 %			
4	Avdrag				
5					
6					
7	År	Restlån	Renter	Avdrag	Terminbeløp
8	1	3600000			
9	2				
10	3				
11	4				
12	5				
13	6				
14	7				
15	8				
16	9				
17	10				
18					
19			Sum renter	Sum avdrag	Sum terminbeløp
20					

a)

Fullfør nedbetalingsplanen i et regneark.

Løsningsforslag a)

Vi skriver av tabellen og fullfører den. Restlånet starter på 3600000 kr, og skal bli 360000 kr mindre for hvert år.

Avdragene er 360000 kr hvert år.

Rentebeløpet er 4% rente av restlånet det året.

Terminbeløpet er summen av avdraget og rentebeløpet hver måned. For å finne summen av celler skriver du inn:

$$=SUM()$$

Og velger de cellene du vil summere.

Svar:

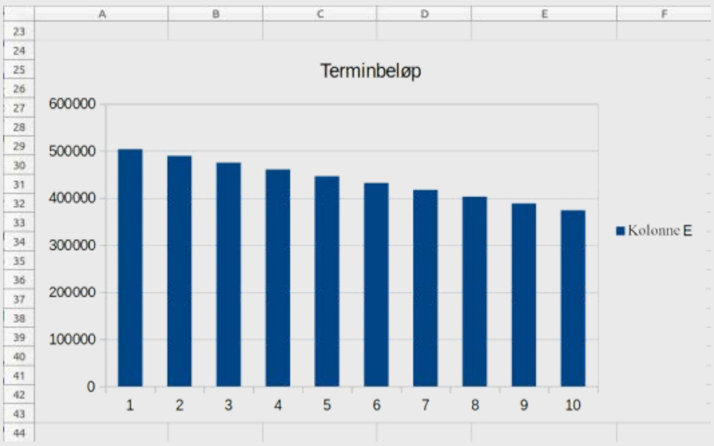
	A	B	C	D	E	F
1	Lånebeløp (kroner)	3600000				
2	Antall terminer (år)	10				
3	Rente per år	4,00%				
4	Avdrag	360000				
5						
6						
7	År	Restlån	Renter	Avdrag	Terminbeløp	
8	1	3600000	144000	360000	504000	
9	2	3240000	129600	360000	489600	
10	3	2880000	115200	360000	475200	
11	4	2520000	100800	360000	460800	
12	5	2160000	86400	360000	446400	
13	6	1800000	72000	360000	432000	
14	7	1440000	57600	360000	417600	
15	8	1080000	43200	360000	403200	
16	9	720000	28800	360000	388800	
17	10	360000	14400	360000	374400	
18				10 R x 1 C		
19			Sum renter	Sum avdrag	Sum terminbeløp	
20			=SUM()C8:C17			
21						

b)

Framstill terminbeløp for hvert år i et passende diagram.

Løsningsforslag b)

For å lage et stolpediagram markerer vi alle terminbeløpene, og klikker på *Diagrammer*. Inne på *Diagrammer* velger vi *Stolpediagram*.



c)

Isak vurderer å betale ned lånet i løpet av 8 år med én termin per år. Renten er fortsatt $4{,}0\%$ per år.

Hvor mye mindre betaler Isak i renteutgifter totalt ved å redusere antall terminer til 8?

Løsningsforslag c)

Avdraget er det samme som det totale lånet dividert med antall terminer. Avdraget med 8 terminer blir:

$$3600000 \text{ kr} : 8 = 450000 \text{ kr}$$

Vi setter opp en lignende nedbetaling som i oppgave a. Nå er avdraget 450000, så restlånet blir 450000 kr mindre for hvert år. Lånet betales tilbake i løpet av 8 år. Renten er fremdeles 4%.

Vi finner forskjellen i renteutgiftene ved å trekke renteutgiftene når det er 8 terminer fra renteutgiftene når det er 10 terminer. Forskjellen er 144000.

	A	B	C	D	E	F
45						
46	Lånebeløp (kroner)	3600000				
47	Antall terminer (år)	8				
48	Rente per år	4,00%				
49	Avdrag	450000				
50						
51						
52	År	Restlån	Renter	Avdrag	Terminbeløp	
53	1	3600000	144000	450000	594000	
54	2	3150000	126000	450000	576000	
55	3	2700000	108000	450000	558000	
56	4	2250000	90000	450000	540000	
57	5	1800000	72000	450000	522000	
58	6	1350000	54000	450000	504000	
59	7	900000	36000	450000	486000	
60	8	450000	18000	450000	=SUM(C60:D60)	
61						
62						
63						
64			Sum renter	Sum avdrag	Sum terminbeløp	
65			648000	3600000	3780000	
66						
67			Forskjell renter:	144000		
68						

Svar: Isak betaler $144\,000 \text{ kr}$ mindre i renteutgifter

Oppgave 4 (5 poeng) Nettkode: E-4CGX

I oppgave 4 b), c) og d) skal du bruke graftegner på datamaskin.

En modell som kan vise hvordan vekten til et lam øker etter fødselen, er gitt ved funksjonen

$V(x) = 0{,}28x + 5$

$V(x)$ er vekten til et lam målt i kilogram x dager etter fødselen.

a)
Hvor mye veier et nyfødt lam?

Hvor mye øker vekten til et lam per dag?

Løsningsforslag a)

Når lammet er nyfødt har det gått 0 dager siden fødselen. Da er $x = 0$. Vi setter det inn i funksjonen:

$$V(0) = 0,28 \cdot 0 + 5 = 0 + 5 = \underline{5}$$

Stigningstallet sier hvor mye vekten øker per dag. Vekten til lammet øker altså med $0,28 \text{ kg}$ hver dag.

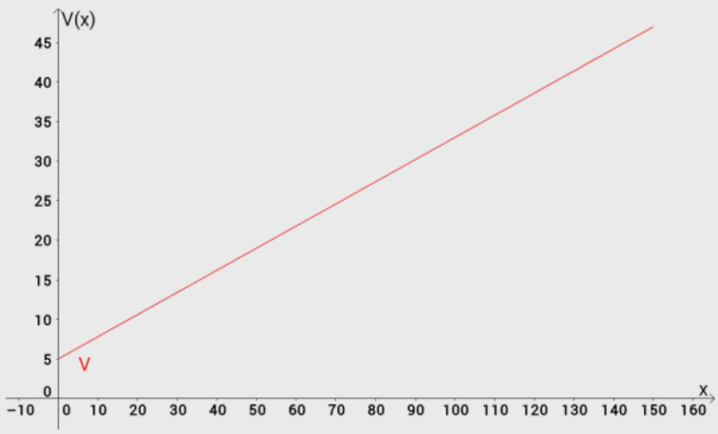
Svar: Et nyfødt lam veier 5 kg. Vekten øker med $0,28 \text{ kg}$ per dag.

b)
Bruk graftegner til å tegne grafen til V når $0 \leq x \leq 150$.

Løsningsforslag b)

I GeoGebra tegner vi grafen ved å skrive i kommandovinduet:

$Funksjon[0.28 * x + 5, 0, 150]$



c)

Bestem grafisk hvor mye et lam veier når det er 75 dager gammelt.

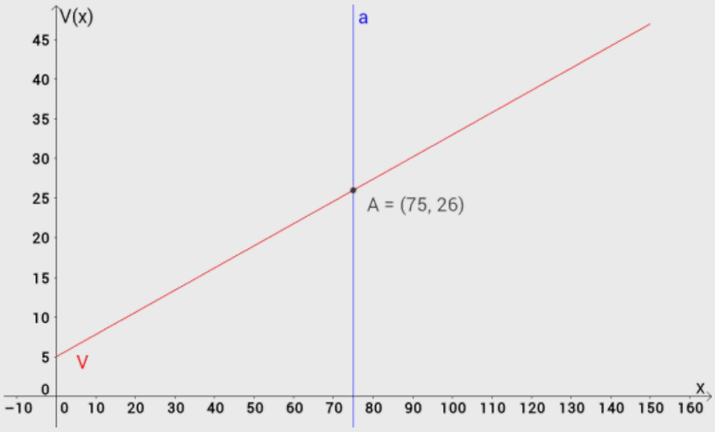
Løsningsforslag c)

Vi tegner en graf som er en rett linje gjennom $x = 75$, altså når det har gått 75 dager. Det gjør vi ved å skrive:

$$x = 75$$

Skjæringspunktet finner vi ved å klikke på *Vis skjæringspunkt* og velge grafene. Punktet som dukker opp er skjæringspunktet.

Skjæringspunktet er $(75, 26)$. Det vil si at et lam veier 26 kg etter 75 dager.



Svar: Et lam veier $26\ \text{kg}$ etter 75 dager.

d)

Et lam slaktes når det veier mer enn $45\ \mathrm{kg}$.

Bestem grafisk hvor mange dager gammelt et lam minst må være når det slaktes.

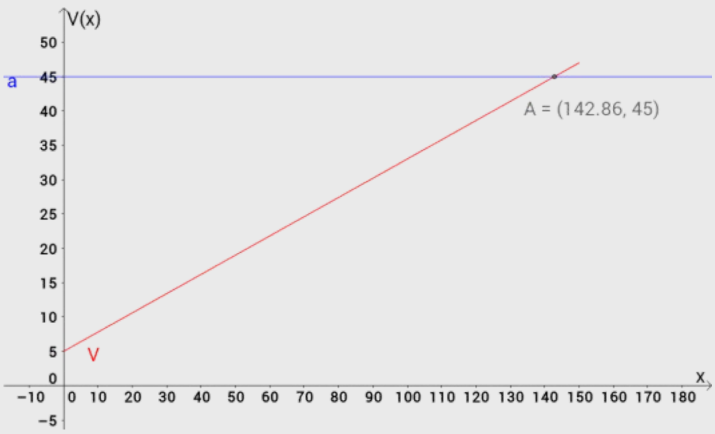
Løsningsforslag d)

Vi tegner en graf som er en rett linje igjennom $y = 45$, altså når lammet veier $45\ \mathrm{kg}$. Det gjør vi ved å skrive kommandoen:

$$y = 45$$

Skjæringspunktet finner vi ved å klikke på *Vis skjæringspunkt* og velge grafene. Punktet som dukker opp er skjæringspunktet.

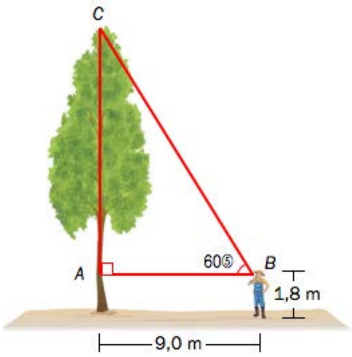
Skjæringspunktet er $(142.86, 45)$. Det vil si at et lam over 45 kg må være minst 143 dager gammelt.



Svar: Lammet må være 143 dager gammelt for å veie 45 kg.

Oppgave 5 (6 poeng) Nettkode: E-4CH3

Christian skal hugge ned et tre som står loddrett på et flatt område. Christian står og ser mot treet fra et punkt B til et punkt A på treet. Toppen av treet kaller vi punkt C. Se skisse 1.



a)

Regn ut høyden til treet ved hjelp av opplysningene i skisse 1.

Løsningsforslag a)

Høyden av treet er AC + høyden til Christian, altså $AC + 1,8 \text{ m}$. Vi kan bruke pytagoras læresetning for å finne AC. Pytagoras læresetning er:

$$\text{katet}^2 + \text{katet}^2 = \text{hypotenus}^2$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

Kortsiden i trekanten, som vi kaller AB, er $9,0 \text{ m}$. I en 30°-, 60°-, 90°-trekant er den lengste siden *dobbelt* så lang som den korteste. Det betyr at $BC = 2 \cdot AB$. Vi setter inn og regner ut

$BC = 2 \cdot AB = 2 \cdot 9,0 \text{ m} = 18,0 \text{ m}$

Nå vet vi to av sidene. Vi skriver om formelen slik at det står AC er lik:

$$AC^2 + AB^2 = BC^2$$

Vi trekker fra AB^2 på begge sider av likhetstegnet:

$$AC^2 + AB^2 - AB^2 = BC^2 - AB^2$$

$$AC^2 = BC^2 - AB^2$$

Vi setter inn $18,0 \text{ m}$ for BC og $9,0 \text{ m}$ for AB:

$AC^2 = 18,0^2 \text{ m}^2 - 9,0^2 \text{ m}^2 = 324,0 \text{ m}^2 - 81,0 \text{ m}^2 = 243,0 \text{ m}^2$

Vi tar kvadratroten på begge sider av likhetstegnet:

$$AC = \sqrt{243,0}\text{m} = 15,6\text{m}$$

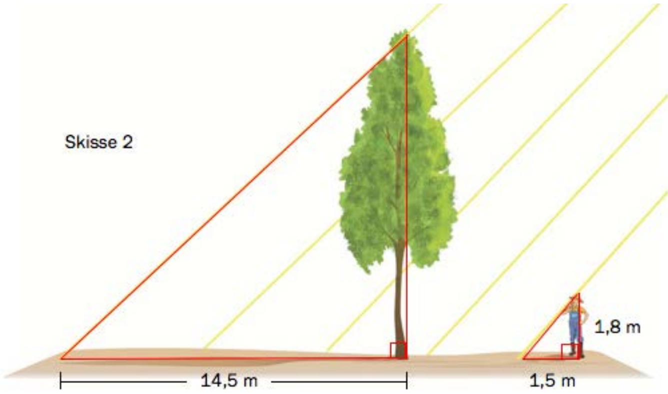
Vi må huske å regne med høyden til Christian! Høyden til treet er derfor:

$\text{Høyde} = 15,6\ \text{m} + 1,8\ \text{m} = 17,4\ \text{m}$

Svar: Høyden til treet er $17{,}4\ \text{m}$.

b)

Neste dag skinner solen. Vi antar at solstrålene er parallelle. Christian vil kontrollere utregningen sin ved å regne ut høyden til treet på en annen måte. Skyggen til treet er $14{,}5\ \text{m}$. Skyggen til Christian er $1{,}5\ \text{m}$. Se skisse 2.



Regn ut høyden til treet ved hjelp av opplysningene i skisse 2.

Løsningsforslag b)

Trekantene er formlike. Da er forholdet mellom høyden og skyggen til Christian, det samme som forholdet mellom høyden og skyggen til treet. Vi setter det opp:

$$\frac{\text{Christians høyde}}{\text{Christians skygge}} = \frac{\text{Treets høyde}}{\text{Treets skygge}}$$

Vi setter inn at Christans høyde er $1,8\ \text{m}$ og skygge $1,5\ \ \text{m}$, og at treets skygge er $14,5\ \ \text{m}$. Vi kaller treets høyde TH:

$\frac{1{,}8}{1{,}5} = \frac{TH}{14{,}5}$

Vi skriver om slik at det står TH er lik, ved å multipliserer med $14,5$ på begge sider av likhetstegnet:

$\frac{1{,}8}{1{,}5} \cdot 14{,}5 = \frac{TH \cdot 14{,}5}{14{,}5 \cdot 14{,}5}$

Vi forkorter og får at:

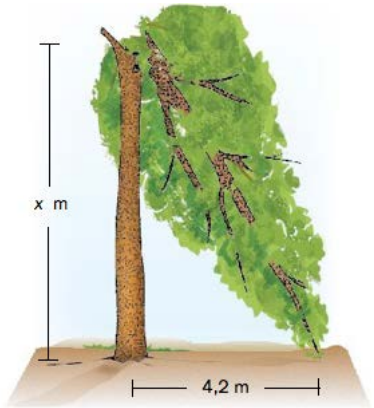
$TH = \frac{1{,}8 \cdot 14{,}5}{1{,}5} = 17{,}4$

Svaret er det samme som i oppgave a!

Svar: Høyden til treet er $17{,}4\ \text{m}$.

c)

Et annet tre på samme område knekker i en kraftig storm. En del av treet blir hengende slik skisse 3 viser. Tretoppen berører bakken.



Christian vet at dette treet var $18{,}0\ \mathrm{m}$ høyt før det knakk. Avstanden mellom tretoppen på bakken og trestammen er $4{,}2\ \mathrm{m}$.

Regn ut hvor høyt over bakken treet knakk.

Løsningsforslag c)

Vi bruker Pytagoras læresetning. Høyden før treet falt var 18 m, og x m etter det har falt. Da er den delen som har falt $18 - x$ m lang. Den horisontale siden er $4,2$ m. Vi setter inn $4,2$ m for AB, x for AC og $18 - x$ for BC i formelen:

$$x^2 + 4,2^2 = \left(18 - x\right)^2$$

Denne likningen kan vi løse for x. Vi bruker andre kvadratsetning for å løse opp parentesen. Andre kvadratsetning er:

$$\left(a - b\right)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Vi løser opp parentesen:

$$x^2 + 17,64 = 18^2 - 2 \cdot 18 \cdot x + x^2$$

Vi trekker fra x^2 på begge sider av likhetstegnet:

$$x^2 - x^2 + 17,64 = 324 - 36x + x^2 - x^2$$
$$17,64 = 324 - 36x$$

Vi legger til $36x$ på begge sider av likhetstegnet:

$$36x + 17,64 = 324 - 36x + 36x$$

Vi trekker fra $17,64$ på begge sider av likhetstegnet:

$$36x + 17,64 - 17,64 = 324 - 17,64$$

$$36x = 306,36$$

Vi dividerer med 36 på begge sider av likhetstegnet og forkorter:

$$\frac{36x}{36} = \frac{306{,}36}{36}$$

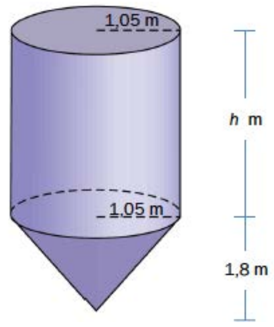
$$x = 8.51$$

x er høyden over bakken, så treet knakk $8,51 \text{ m}$ over bakken.

Svar: Treet knakk $8{,}51 \text{ m}$ over bakken.

Oppgave 6 (6 poeng) Nettkode: E-4CHA

En silo er satt sammen av en rett sylinder og en rett kjegle. Radien $r = 1{,}05\ \mathrm{m}$ er den samme i både sylinderen og kjeglen. Høyden i kjeglen er $1{,}8\ \mathrm{m}$. Se skissen nedenfor.



a)
Regn ut volumet av kjeglen.

Løsningsforslag a)

Formelen for volumet av en kjegle er

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Der r er radius og h er høyde.

Høyden i kjeglen er $1,8\ \mathrm{m}$, sirkelflaten har radius $1,05\ \mathrm{m}$. Vi setter inn tallene i formelen for volumet:

Vi setter inn $1,8\ \mathrm{m}$ for h og $1,05\ \mathrm{m}$ for r:

$V = \frac{1}{3} \cdot 1,8\ \mathrm{m} \cdot \pi \cdot 1,05^2\ \mathrm{m}^2 = 2{,}1\ \mathrm{m}^3$

Svar: Volumet av kjeglen er $2{,}1\ \mathrm{m}^3$.

b)
Volumet av hele siloen er $14{,}5\ \mathrm{m}^3$.

Regn ut høyden av hele siloen.

Løsningsforslag b)

Vi vet hva volumet til kjeglen er, og hva volumet til hele siloen er. Volumet av sylinderen er:

$$V = \text{volumet av siloen} - \text{volumet av kjeglen}$$

$$V = 14,5\text{m}^3 - 2,1\text{m}^3 = 12,4\text{m}^3$$

Formelen for volumet av en sylinder er:

$$V = Gh = \pi r^2 h$$

Fordi grunnflaten er en sirkel πr^2.

Vi ønsker å finne høyden. Derfor skriver vi om formelen for volumet slik at det står høyde er lik:

$$V = h\pi r^2$$

Vi dividerer med πr^2 på begge sider av likhetstegnet og forkorter:

$$\frac{\pi r^2 h}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$\frac{h}{1} = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

Nå setter vi inn $12,4\ \text{m}^3$ for V og $1,05\ \text{m}$ for r:

$$h = \frac{12,4\ \text{m}^3}{\pi \cdot 1,05^2\ \text{m}^2} = 3{,}6\ \text{m}$$

Høyden av hele siloen er summen av høyden av kjeglen og høyden av sylinderen:

$H = h + 1,8\ \text{m} = 3,6\ \text{m} + 1,8\ \text{m} = 5,4\ \text{m}$

Svar: Høyden av hele siloen er $5{,}4\ \text{m}$.

c)

I en liknende silo er radien i både sylinderen og kjeglen lik r. Høyden i sylinderen er h_1. Høyden i kjeglen er h_2. Forholdet mellom volumet av sylinderen og volumet av kjeglen er $6\ :\ 1$.

Regn ut forholdet mellom h_1 og h_2.

Løsningsforslag c)

Her trenger vi igjen formlene for volum av kjegle og sylinder. Vi skriver dem med h_1 og h_2. Sylinder:

$$V_1 = h_1 G$$

Og kjegle:

$$V_2 = \frac{1}{3} h_2 G$$

Både sylinderen og kjeglen har en sirkel med radius r som grunnflate. Vi vet at forholdet mellom volumet av sylinderen og volumet av kjeglen er $6:1$. Det kan vi skrive slik:

$$\frac{V_1}{V_2} = 6$$

Vi kan sette inn uttrykkene for volumene i denne likningen:

$$\frac{h_1 G}{\frac{1}{3} h_2 G} = 6$$

Vi multipliserer med 3 over og under brøkstreken på venstre side:

$$\frac{3 \cdot h_1 G}{3 \cdot \frac{1}{3} h_2 G} = 6$$

$$\frac{3 h_1 G}{h_2 G} = 6$$

G er fellesfaktor og vi kan fortkorte den:

$$\frac{3 h_1}{h_2} = 6$$

Vi dividerer med 3 på begge sider av likhetstegnet:

$$\frac{3 h_1}{3 \cdot h_2} = \frac{6}{3}$$

$$\frac{h_1}{h_2} = 2$$

Vi får at forholdet mellom høydene h_1 og h_2 er $2:1$.

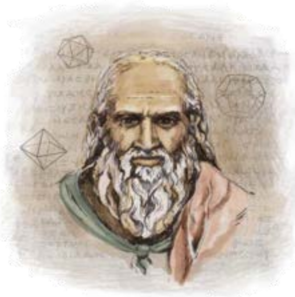
Svar: $\underline{\underline{2:1}}$

Oppgave 7 (2 poeng) Nettkode: E-4CO7

Platon (ca. 428 f.Kr.–ca. 347 f.Kr.) var en berømt gresk filosof.

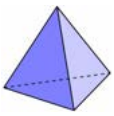
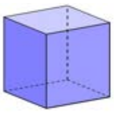
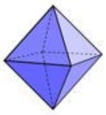
Han var også matematiker og grunnla et berømt akademi i Athen.

Fra Platon har vi navnet på de *platonske romlegemene*.



I et platonsk romlegeme er alle sideflatene regulære mangekanter og helt like (kongruente). Antall sideflater i romlegemet er F, antall hjørner er H og antall sidekanter er K.

Nedenfor ser du tre av de platonske romlegemene.

Tetraeder **Heksaeder** **Oktaeder**

a)
Skriv av tabellen nedenfor, og fyll inn tallene som mangler.

	Antall sideflater F	Antall hjørner H	Antall sidekanter K
Tetraeder	4	4	6
Heksaeder			
Oktaeder			

Løsningsforslag a)

Vi starter med å se på **tetraederet**. Sideflatene er trekantene, eller 'veggene' i figuren. De er flater som dannes av sidekantene. Det er 4 sideflater i tetraederet.

$$\text{Sideflater i tetraeder} = 4$$

Sidekantene er linjene, både de tykke og de stiplede. Det er 6 sidekanter i tetraederet.

$$\text{Sidekanter i tetraeder} = 6$$

Hjørnene er stedene der to eller flere linjer møtes. Det er 4 hjørner i tetraederet.

$$\text{Hjørner i tetraeder} = 4$$

Vi gjør det samme for de andre figurene, og setter tallene inn i en tabell:

$$\begin{array}{l} \\ Tetraeder \\ Heksaeder \\ Oktaeder \end{array}\begin{bmatrix} F & H & K & (F+H)-K \\ 4 & 4 & 6 & 2 \\ 6 & 8 & 12 & 2 \\ 8 & 6 & 12 & 2 \end{bmatrix}$$

Svar:

$$\begin{array}{l} \\ Tetraeder \\ Heksaeder \\ Oktaeder \end{array}\begin{bmatrix} F & H & K & (F+H)-K \\ 4 & 4 & 6 & 2 \\ 6 & 8 & 12 & 2 \\ 8 & 6 & 12 & 2 \end{bmatrix}$$

b)

Regn ut $F+H-K$ for hvert av romlegemene. Lag en regel.

Løsningsforslag b)

Vi starter med Tetraeder:

$$F+H-K = 4+4-6 = \underline{2}$$

Heksaeder:

$$F+H-K = 6+8-12 = \underline{2}$$

Oktaeder:

$$F+H-K = 8+6-12 = \underline{2}$$

Vi ser at svaret er 2 for alle tre. Vi kan da lage en regel for romlegemer:

$$F+H-K = 2$$

Svar: $F+H-K=2$

Oppgave 8 (2 poeng) Nettkode: E-4COX

Platon forteller om filosofen Sokrates og Menons slave, som diskuterer hvordan de kan gjøre arealet av et kvadrat dobbelt så stort.

a)

Et kvadrat har side $1{,}0 \text{ cm}$. Dersom siden i kvadratet fordobles, hva skjer da med arealet?

Forklar.

Løsningsforslag a)

Arealet av et kvadrat med sider s er

$$A = s^2$$

Vi bruker formelen for arealet til kvadratet for å se hva som skjer. Arealet til kvadratet med sider 1 cm er da:

$$A_1 = 1^2 = 1$$

Arealet til kvadratet med sider 2 cm er :

$$A_2 = 2^2 = 4$$

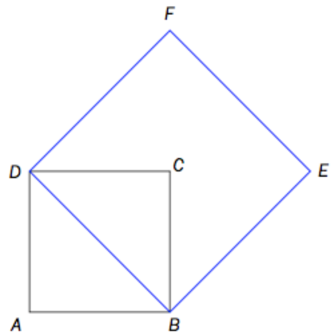
Arealet blir altså 4 ganger så stort hvis du dobler sidelengdene.

La oss se på et eksempel. Arealet til et kvadrat med sider 3 cm er lik 9 cm^2, mens arealet til et kvadrat med sider 6 cm er lik 36 cm^2 (vi doblet sidene og arealet ble fire ganger større).

Svar: Arealet blir 4 ganger så stort.

b)

Bruk figuren nedenfor og vis at arealet av kvadratet $BEFD$ er dobbelt så stort som arealet av kvadratet $ABCD$.



Løsningsforslag b)

Vi kaller sidelengdene i kvadrat $ABCD$ for s. Så bruker vi Pytagoras læresetning for å finne ut hvor lang siden BD er. Pytagoras læresetning er:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

BD er sidelengden i det store kvadratet $BEFD$. Vi kaller sidene i denne for S.

$$s^2 + s^2 = S^2$$

$$S^2 = 2s^2$$

$$S = \sqrt{2s^2} = \sqrt{2}s$$

Arealet av $ABCD$ er

$$a = s^2$$

Arealet av $BEFD$ er

$$A = S^2 = \left(\sqrt{2}s\right)^2 = 2s^2 = 2a$$

Arealet av $BEFD$ er altså dobbelt så stort som arealet av $ABCD$.

Svar: Arealet av $BEFD$ er to ganger arealet av $ABCD$, som er det vi skulle vise.

Oppgave 9 (5 poeng) Nettkode: E-4CP1

Et pytagoreisk trippel er tre hele tall a, b og c der $a^2 + b^2 = c^2$. Platons formel for å finne slike pytagoreiske tripler ser du nedenfor.

Platons formel

$\left(n^2 - 1\right)^2 + (2n)^2 = \left(n^2 + 1\right)^2$

når $n = 2{,}3{,}4\dots$

Eksempel når $n = 2$:

$\left(2^2 - 1\right)^2 + (2 \cdot 2)^2 = \left(2^2 + 1\right)^2$

$3^2 + 4^2 = 5^2$

a)
Regn ut hvilket pytagoreisk trippel du får dersom $n = 6$.

Løsningsforslag a)

Platons formel for en pytagoreisk trippel er

$$(n^2 - 1)^2 + (2n)^2 = (n^2 + 1)^2$$

Pythagoras læresetning er:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Vi kan kombinere disse så vi får et uttrykk for a, b og c:

$$a = n^2 - 1$$

$$b = 2n$$

$$c = n^2 + 1$$

Vi bruker uttrykkene vi har funnet for a, b og c, og setter inn 6 for n. Først a:

$$a = n^2 - 1$$

$$a = 6^2 - 1 = 36 - 1 = 35$$

Så b:

$$b = 2n$$

$$b = 2 \cdot 6 = 12$$

Så c:

$$c = n^2 + 1$$

$$c = 6^2 + 1 = 36 + 1 = 37$$

Svar: $\underline{\underline{35,\ 12\ \text{og}\ 37}}$

b)

Tallene $(120,\ 22,\ 122)$ er et pytagoreisk trippel. Hva er verdien av n i dette tilfellet?

Løsningsforslag b)

Det største tallet i trippelen er 122. Vi vet derfor at dette er c, den lengste siden. Vi setter det inn i Platons formel og løser ligningen for n.

$$c = n^2 + 1$$

$$122 = n^2 + 1$$

$$122 - 1 = n^2 + 1 - 1$$

Vi flytter n^2 til venstre side

$$n^2 = 121$$

$$\sqrt{n^2} = \sqrt{121}$$

$$n = \underline{11}$$

Så $n = 11$. Vi setter det inn i uttrykkene for a og b, og ser om det stemmer med trippelen $(120, 22, 122)$.

$$a = n^2 - 1$$

$$a = 11^2 - 1 = 121 - 1 = \underline{120}$$

$$b = 2n$$

$$c = 2 \cdot 11 = \underline{22}$$

Det stemmer! Så $(122, 22, 120)$ er trippelen til $n = 11$.

Svar: $\underline{\underline{n = 11}}$

c)

Vis at $\left(n^2-1\right)^2+(2n)^2=\left(n^2+1\right)^2$ ved å regne ut venstre side og høyre side i likningen.

Løsningsforslag c)

Her bør vi bruke de to første kvadratsetningene:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \ \text{(likning 1)}$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \ \text{(likning 2)}$

Vi starter med å regne ut **venstre side** (VS), der vi bruker likning 2.

$$(n^2-1)^2+(2n)^2$$

$$=(n^2)^2-2\cdot n^2\cdot 1+1^2+2^2\cdot n^2$$

Husk at $1^2=1$:

$$n^{2\cdot 2}-2\cdot n^2+1+4\cdot n^2$$

$$=n^4-2n^2+1+4n^2$$

Vi trekker sammen og får

$$=\underline{n^4+2n^2+1}$$

Nå regner vi **høyre side**, der vi bruker likning 1.

$$(n^2+1)^2$$

$$=(n^2)^2+2\cdot n^2\cdot 1+1^2$$

$$=\underline{n^4+2n^2+1}$$

Høyre side er lik venstre side!