MAT0010 2013 HØST

Eksamenstid:

5 timer totalt:
Del 1 og Del 2 skal deles ut samtidig.
Del 1 skal du levere innen 2 timer.
Del 2 skal du levere innen 5 timer.

Hjelpemidler på Del 1:
Ingen hjelpemidler er tillatt, bortsett fra vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Hjelpemidler på Del 2:
Etter at Del 1 er levert inn, er alle hjelpemidler tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte og forklaring:
Del 1 har 17 oppgaver. Du skal svare på alle oppgavene. Skriv med penn når du krysser av eller fører inn svar i Del 1.

I regneruter skal du vise hvordan du kommer fram til svaret. Ved konstruksjon skal du bruke passer, linjal og blyant.

Du skal ikke kladde på oppgavearkene. Bruk egne kladdeark.

På flervalgsoppgavene setter du bare ett kryss per spørsmål.

Eksempel:
Uttrykket $3 \cdot (1 + 2 \cdot 2)^2$ har verdien

35	50	62	75
○	○	○	⊗

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Vis hvordan du har kommet fram til svarene. Før inn nødvendige mellomregninger. Skriv med penn.

I regnearkoppgaver skal du ta utskrift av det ferdige regnearket. Husk å vise hvilke formler du har brukt i regnearket. Du skal levere utskriften sammen med resten av besvarelsen.

Dersom du bruker en digital graftegner, skal skala og navn på aksene være med på utskriften.

Veiledning om vurderingen:
Den høyeste poengsummen i Del 1 er 24, og poengsum i Del 2 er høyst 36, men de er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering på grunnlag av Del 1 og Del 2. Sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er kreativ og kan anvende fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng) Nettkode: E-4GDN

Regn ut

a)
$333 + 679 =$

Løsningsforslag a)

Vi setter opp regnestykket ved å sette ener over ener, tier over tier og hundrer over hundrer:

$$\begin{array}{r} 333 \\ +\,679 \\ \hline = \quad\;\; \\ \hline \end{array}$$

Vi begynner med å legge sammen sifrene på enerplassene. Summen av enerne er $3 + 9 = 12$ og derfor skriver vi 2 på enerplassen og flytter tieren over tiere (skriver 1 over de andre):

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\;\; \\ 333 \\ +\,679 \\ \hline = \quad 2 \\ \hline \end{array}$$

Vi gjør det samme på tierplassen. Summen av tierne er $1 + 3 + 7 = 11$ tiere slik at vi skriver 1 på tierplassen, og flytter hundrer over til hundrer, altså skriver 1 over hundrere:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1}\;\; \\ 333 \\ +\;\;679 \\ \hline =1012 \\ \hline \end{array}$$

Svar: $\underline{\underline{1012}}$

b)
$859 - 378 =$

Løsningsforslag b)

Vi setter opp regnestykket på denne måten:

$$
\begin{array}{r}
859 \\
-\ 378 \\
\hline
= \\
\hline
\end{array}
$$

Vi begynner med enerplassen. 9 er større enn 8 slik at $9 - 8 = 1$ og vi skriver 1 på enerplassen:

$$
\begin{array}{r}
859 \\
-\ 378 \\
\hline
= 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Vi ser på tierplassen. 7 er større enn 5 og derfor må vi veksle en tier i ti enere. Da får vi $15 - 7 = 8$. Vi skriver 8 på tierplassen og fordi vi vekslet en tier, må vi huske å trekke denne fra tiere og skriver derfor -1 over tierne:

$$
\begin{array}{r}
{\scriptstyle -1} \\
859 \\
-\ 378 \\
\hline
= 81 \\
\hline
\end{array}
$$

På hundrerplassen regner vi ut $-1 + 8 - 3 = 4$ og får at:

$$
\begin{array}{r}
{\scriptstyle -1} \\
859 \\
-\ 378 \\
\hline
= 481 \\
\hline
\end{array}
$$

Svar: $\underline{\underline{481}}$

c)
$7{,}4 \cdot 3{,}6 =$

Løsningsforslag c)

Vi setter opp regnestykket:

$7{,}4 \cdot 3{,}6 =$

Vi multipliserer ett og ett siffer fra faktoren til høyre inn i faktoren til venstre. Vi starter med å multiplisere inn 6, men vi lar foreløpig være å skrive komma i mellomsvaret:

$$
\begin{array}{l}
7,4 \cdot 3,6 = \\
\hline
4\,4\,4
\end{array}
$$

Når multipliserer vi 3 med faktoren til venstre. Vi setter en null for å vise at vi har flyttet oss fra tiendedelsplassen til enerplassen:

$$\begin{array}{r} 7,4 \cdot 3,6 = \\ \hline 444 \\ +2220 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

Nå adderer vi tallene. Antallet desimaler i resultatet skal være lik summen av antall desimaler i faktorene. Det er en desimal i første faktor og en desimal i andre faktor, og derfor skal resultatet ha to desimaler.

$$\begin{array}{l} 7,4 \cdot 3,6 = 26,64 \\ \hline \ \ 444 \\ +2220 \\ \hline \ 2664 \\ \hline \end{array}$$

Svar: $\underline{\underline{26,64}}$

d)

$24 : 0{,}3 =$

Løsningsforslag d)

Først skriver vi divisjonsstykket som en brøk. Vi utvider brøken for å slippe og regne med desimaltall:

$\frac{24}{0{,}3} = \frac{24 \cdot 10}{0{,}3 \cdot 10} = \frac{240}{3}$

Nå setter vi opp regnestykket:

$240 : 3 =$

Vi ser på sifrene i dividenden. Vi kan ikke dividere $2 \text{ med } 3$, så vi tar med neste siffer. Vi regner ut $24 : 3 = 8$. Vi skriver 8 i resutlatet, og trekker fra 24:

$$\begin{array}{l} \ \ 240 : 3 = 8 \\ -24\downarrow \\ \hline \ \ \ \ 00 \end{array}$$

Vi ser at $0 \cdot 3 = 0$, så vi setter 0 i resultatet.

$$\begin{array}{l} \ \ 240 : 3 = 80 \\ -24\downarrow \\ \hline \ \ \ \ 00 \end{array}$$

ALTERNATIV LØSNING

Vi skriver divisjonsstykket som brøken $\frac{240}{3}$. Nevneren er et primtall. Vi primtallsfaktoriserer telleren, det vil si vi skriver telleren som produktet av primtall:

$\frac{240}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{3}$. Vi forkorter fellesfaktoren 3 og får at:

$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{3} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 80$

Legg merke til at vi strengt tatt ikke trengte å primtallsfaktorisere 80.

Oppgave 2 (2 poeng) Nettkode: E-4BH4

Gjør om

a)
$78\ \text{dL} \ = \_\_\_\_\ \text{L}$

Løsningsforslag a)

$10\ \text{dL}$ er $1\ \text{L}$. Da er $1\ \text{dL}$ det samme som $0,1\ \text{L}$.

$78\ \text{dL} = 78 \cdot 0,1\ \text{L} = 7,8\ \text{L}$

Svar: $78\ \text{dL}\ \text{er}\ 7{,}8\ \text{L}$.

b)
$1{,}3\ \text{mil} \ = \_\_\_\_\ \text{m}$

Løsningsforslag b)

Vi vet at 1 mil er 10 kilometer, og at 1 kilometer er 1000 meter:

$1,3\ \text{mil} = 1,3 \cdot 10\ \text{km} = 13 \cdot 1000\ \text{m} = 13000\ \text{m}$

Svar: $1{,}3\ \text{mil}$ er $13\,000\ \text{m}$.

c)
$2{,}5\ \text{t} = \_\_\_\_\ \text{kg}$

Løsningsforslag c)

$1\ \text{t}$ er lik $1000\ \text{kg}$. Vi gjør om:

$2,5\ \text{t} = 2,5 \cdot 1000\ \text{kg} = 2500\ \text{kg}$

Svar: $2{,}5\ \text{tonn}$ er $2500\ \text{kg}$.

d)

$12\ 000\ \text{cm}^2$ = _____ m^2

Løsningsforslag d)

Vi ser for oss at én kvadratcentimeter $1\ \text{cm}^2$ er overflaten av et kvadrat hvor alle sidene er $1\ \text{cm}$ lange. Arealet er:

$$1\text{cm} \cdot 1\text{cm} = 1\text{cm}^2$$

$100\ \text{cm}$ er $1\ \text{m}$. Gjør vi om til meter, er hver av sidene $0,01\ \text{m}$ lange:

$1\ \text{cm}^2 = 0,01\ \text{m} \cdot 0,01\ \text{m} = 0,0001\ \text{m}^2$

Vi gjør om:

$12000\ \text{cm}^2 = 12000 \cdot 0,0001\ \text{m}^2 = 1,2\ \text{m}^2$

Svar: $12\ 000\ \text{cm}^2$ er $1{,}2\ \text{m}^2$.

Oppgave 3 (1 poeng) Nettkode: E-4BH9

Regn ut

a)
$\left(-3+2^2\right)\cdot 3=$

Løsningsforslag a)

Vi skal regne ut uttrykket

$$\left(-3+2^2\right)\cdot 3$$

Ifølge regelen for regnerekkefølgen må vi regne ut det som står inne i parentesen først. En potens er grunntallet multiplisert med seg selv så mange ganger som eksponenten tilsier. For eksempel er a^3 det samme som

$$a^3=a\cdot a\cdot a$$

Vi multipliserer ut potensen 2^2:

$$2^2=2\cdot 2=4$$

Og setter det inn i uttrykket:

$$\left(-3+2^2\right)\cdot 3=\left(-3+4\right)\cdot 3$$

Vi regner ut det som står inne i parentesen:

$$(4-3)\cdot 3=1\cdot 3=3$$

Svar: $\underline{\underline{3}}$

b)
$-1^2-(-6+3)^2=$

Løsningsforslag b)

Vi skal regne ut uttrykket

$$-1^2-\left(-6+3\right)^2$$

I følge regelen for regnerekkefølge må vi regne ut det som står i parentesen først. Vi subtraherer:

$$-6+3=3-6=-3$$

Og setter det inn i uttrykket:

$$-1^2 - (-3)^2$$

Vi multipliserer ut potensene. Husk at 1 opphøyd i et tall alltid er 1. For eksempel:

$$1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Subtraksjonstegnet står *utenfor* 1^2, så det er ikke en del av grunntallet.
Subtraksjonstegnet står *inne i* parentesen i $(-3)^2$, så -3 er grunntallet:

$$-(1 \cdot 1) - (-3) \cdot (-3)$$

$$-1 - 9 = -10$$

Svar: $\underline{\underline{-10}}$

Oppgave 4 (2 poeng) Nettkode: E-4BHC

Regn ut, og forkort brøken hvis det er mulig

a)
$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} =$

Løsningsforslag a)

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

3 er ikke en faktor i 2, og 2 er ikke en faktor i 3, så vi finner fellesnevner ved å multiplisere 2 og 3. Fellesnevner er:

$$2 \cdot 3 = 6$$

Vi utivder brøkene ved å multiplisere med samme tall oppe og nede:

$$\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6}$$

Vi skriver felles brøkstrek og adderer tellerne:

$$\frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$$

Dette kan vi ikke forkorte videre.

Svar: $\frac{5}{6}$

b)
$\frac{9}{4} - \frac{1}{2} =$

Løsningsforslag b)

Brøkene har forskjellig nevner:

$$\frac{9}{4} - \frac{1}{2}$$

2 er en faktor i 4, så 4 er fellesnevner. Vi utvider brøken til venstre ved å multiplisere teller og nevner med 2 :

$$\frac{9}{4} - \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4} - \frac{2}{4}$$

Vi skriver felles brøkstrek og subtraherer tellerne:

$$\frac{9-2}{4} = \frac{7}{4}$$

Vi kan ikke forkorte brøken videre.

Svar: $\underline{\underline{\frac{7}{4} \text{ eller } 1\frac{3}{4}}}$

c)

$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9} =$

Løsningsforslag c)

Vi skriver opp brøkene

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9}$$

Teller multipliseres med teller, og nevner multipliseres med nevner:

$$\frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 9}$$

For å forkorte brøken faktoriserer vi teller og nevner i $\frac{4}{9} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3}$ og forkorter bort fellesfaktorer:

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

Svar: $\underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

d)

$6 : \frac{3}{4} =$

Løsningsforslag d)

$$6 : \frac{3}{4}$$

Vi snur brøken opp ned, og endrer divisjonstegnet til multiplikasjonstegn:

$$6 \cdot \frac{4}{3}$$

Når vi multipliserer et tall med en brøk, multipliserer vi tallet med telleren:

$$\frac{6 \cdot 4}{3}$$

For å forkorte brøken faktoriserer vi teller og nevner, og forkorter bort fellesfaktorer:

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{1} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Svar: 8

Oppgave 5 (1,5 poeng) Nettkode: E-4BHH

Løs likningene

a)
$5x + 3 = 2x + 6$

Løs oppgaven her

Løsningsforslag a)

Vi har likningen:

$$5x + 3 = 2x + 6$$

Vi trekker fra $2x$ på begge sider av likhetstegnet:

$$5x + 3 - 2x = 2x + 6 - 2x$$

$$3x + 3 = 6$$

Vi trekker fra 3 på begge sider av likhetstegnet:

$$3x + 3 - 3 = 6 - 3$$

$$3x = 3$$

Vi dividerer med 3 på begge sider av likhetstegnet og forkorter:

$$\frac{3x}{3} = \frac{3}{3}$$

$$x = 1$$

Svar: $\underline{\underline{x = 1}}$

b)
$\frac{2x}{3} + x = -(x - 2)$

Løs oppgaven her

Løsningsforslag b)

Vi har likningen:

$$\frac{2x}{3} + x = -\left(x - 2\right)$$

Det er enklere å arbeide med en likning uten brøk. Vi mutlipliserer med 3 på begge sider for å bli kvitt nevneren til brøken. Husk å multiplisere *alle* ledd med 3:

$$\frac{2x}{3} \cdot 3 + x \cdot 3 = -\left(x - 2\right) \cdot 3$$

$$2x + 3x = -3(x - 2)$$

$$5x = -3(x - 2)$$

Parentesen må multipliseres ut. Når et tall multipliseres med en parentes, må tallet mutipliseres med *alle* ledd i parentesen:

$$5x = -3 \cdot x - 3 \cdot (-2)$$

$$5x = -3x + 6$$

Vi adderer $3x$ på begge sider av likhetstegnet:

$$5x + 3x = -3x + 3x + 6$$

$$8x = 6$$

Vi dividerer med 8 på begge sider av likhetstegnet og forkorter:

$$\frac{8x}{8} = \frac{6}{8}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{3}{4}$$

Svar: $\underline{\underline{x = \frac{3}{4}}}$

Oppgave 6 (1 poeng) Nettkode: E-4BHK

På et kart er den korteste avstanden mellom to byer 2 cm. Kartet har en målestokk på 1 : 50 000.

Avstanden mellom byene (i luftlinje) er ____ km i virkeligheten.

Løsningsforslag

Avstanden på kartet er $2\ \mathrm{cm}$. Da er avstanden i virkeligheten:

$2 \cdot 50000\ \mathrm{cm} = 100000\ \mathrm{cm}$

Svaret skal oppgis i km. $100\ \mathrm{cm}$ er $1\ \mathrm{m}$, og $1000\ \mathrm{m}$ er $1\ \mathrm{km}$. Så:

$1\ \mathrm{cm} = 1 \cdot 0,01\ \mathrm{m} = 0,01 \cdot 0,001\ \mathrm{km} = 0,00001\ \mathrm{km}$

Å multiplisere med $0,001$ er det samme som å flytte komma 3 ganger til venstre. $100000\ \mathrm{cm}$ blir:

$100000\ \mathrm{cm} = 100000 \cdot 0,00001 = 1\ \mathrm{km}$

Svar: Avstanden mellom byene er $1\ \mathrm{km}$

Oppgave 7 (1 poeng) Nettkode: E-4BHM

Bestem gjennomsnitt og median for disse tallene:

$2 \quad 4 \quad 6 \quad 1 \quad 2 \quad 8 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \quad 2$

Gjennomsnitt: _____

Median: _____

Løsningsforslag

Summen av tallene er:

$$2 + 4 + 6 + 1 + 2 + 8 + 3 + 4 + 2 + 2 = 34$$

Det er 10 tall. Gjennomsnittet er:

$$\frac{34}{10} = 3,4$$

Å dividere med 10 er det samme som å multiplisere med $0,1$.

Nå rangerer vi tallene etter stigende størrelse:

$$1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 3\ 4\ 4\ 6\ 8$$

De midterste tallene er 2 og 3. Medianen er gjennomsnittet av disse tallene:

$$\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Svar: Gjennomsnittet er $3{,}4$ og medianen er $2{,}5$.

Oppgave 8 (1 poeng) Nettkode: E-4BHQ

En bukse koster til vanlig $1\,099$ kroner, og en genser koster til vanlig 899 kroner. Anne kjøper både buksa og genseren og får totalt $38\ \%$ prisavslag.

Gjør overslag, og bestem omtrent hvor mye Anne må betale.

Løs oppgaven her

Løsningsforslag

$1099 \text{ kr} \simeq 1100 \text{ og } \ 899 \text{ kr} \simeq 900 \text{ kr}$

Summen av prisene blir:

$1100 \text{ kr} + 900 \text{ kr} = 2000 \text{ kr}$

$\simeq$ betyr 'ca lik'. Vi runder også opp prosentandelen:

$$38\% \simeq 40\%$$

Anne får ca 40% avslag. Det betyr at hun betaler:

$$100\% - 40\% = 60\%$$

av prisen. For å finne 60% av prisen, finner vi først 1% av 2000 kr. Vi må dividere 2000 med 100:

$$1\% = \frac{2000}{100} \text{ kr} = 20 \text{ kr}$$

Vi finner hvor mye Anne må betale ved å multiplisere med 60:

$$60\% = 60 \cdot 20 \text{ kr} = 1200 \text{ kr}$$

Svar: Anne må betale ca 1200 kr .

Oppgave 9 (0,5 poeng) Nettkode: E-4BHT

PIN-koder på mobiltelefoner består av 4 sifre.

Hvert siffer kan være et tall fra og med 0 til og med 9.

Hvor mange ulike PIN-koder er det mulig å lage?

- ☐ 10
- ☐ 100
- ☐ $10\,000$
- ☐ $100\,000$

Løsningsforslag

PIN-koder består av 4 siffer mellom 0 og 9. Det kan altså være 10 forskjellige siffer på hver plass:

$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8 \text{ eller } 9$

Hvis hver plass kan ha 10 forskjellige siffer, er antall forskjellige kombinasjoner:

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$$

Svar: Det er mulig å lage $10\,000$ ulike PIN-koder (alternativ 3)

Oppgave 10 (0,5 poeng) Nettkode: E-4BHW

Dersom $-2x + 1 < 3$, da er

- ☐ $x < -1$
- ☐ $x < 1$
- ☐ $x < 4$
- ☐ $x > -1$

Løsningsforslag

Vi har ulikheten:

$$-2x + 1 < 3$$

Vi trekker fra 1 på begge sider av ulikhetstegnet:

$$-2x + 1 - 1 < 3 - 1$$

$$-2x < 2$$

Vi dividerer med -2 på begge sider av ulikhetstegnet. Når vi multipliserer eller dividerer med et negativt tall må vi snu ulikhetstegnet:

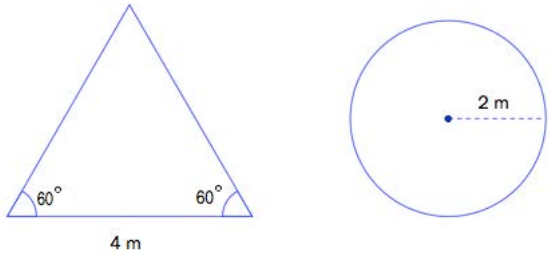
$$\frac{-2x}{-2} > \frac{2}{-2}$$

$$x > -1$$

Svar: $x > -1$

Oppgave 11 (1 poeng) Nettkode: E-4BI4

Nedenfor ser du en skisse av en trekant og en sirkel.



Bestem ved regning om det er trekanten eller sirkelen som har størst omkrets.

Løs oppgaven her

Løsningsforslag

Vi ser først på **trekanten**. Den har to vinkler som er 60°. Vinkelsummen i en trekant er 180°, så den siste vinkelen er:

$180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$

Alle vinklene i trekanten er 60°. Det er en likesidet trekant. Formelen for omkretsen til en likesidet trekant med sider s er:

$$O = 3 \cdot s$$

Omkretsen av trekanten er:

$O = 3 \cdot 4 \text{ m}$

Vi multipliserer ikke sammen tallene enda. Nå ser vi på **sirkelen**. Formelen for omkretsen av en sirkel med radius r er:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi$$

Sirkelen har radius 2 m, så omkretsen er:

$O = 2 \cdot 2 \cdot \pi \text{ m} = 4\pi \text{ m}$

π er ca $3,14$. Omkretsen av trekanten er $3 \cdot 4$ m, og omkretsen av sirkelen er ca $3,14 \cdot 4 \text{ m}$. Fordi $3,14$ er større enn 3 er omkretsen av sirkelen er størst.

Svar: Sirkelen har størst omkrets.

Oppgave 12 (1,5 poeng) Nettkode: E-4BI6

Skriv så enkelt som mulig

a)

$4a - (a + 2a)$

Løs oppgaven her

Løsningsforslag a)

Vi skal forenkle uttrykket

$$4a - (a + 2a)$$

Regnerekkefølgen sier at vi alltid skal regne ut det som står i parentesen først:

$$= 4a - (3a)$$

Vi løser opp parentesen:

$$= 4a - 3a = a$$

Svar: Vi forenkler til a.

b)

$\frac{a^2+a}{a} - a$

Løs oppgaven her

Løsningsforslag b)

Vi skal forenkle uttrykket

$$\frac{a^2 + a}{a} - a$$

Leddene i telleren har en fellesfaktor a, som vi trekker ut:

$$a^2 + a = a \cdot a + a \cdot 1 = a \cdot \left(a + 1\right)$$

Vi setter det inn i uttrykket:

$$\frac{a \cdot (a + 1)}{a} - a$$

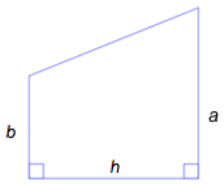
Vi forkorter fellesfaktoren a og trekker sammen:

$$\frac{a + 1}{1} - a = (a + 1) - a = a + 1 - a = 1$$

Svar: Vi forenkler til 1**.**

Oppgave 13 (1 poeng) Nettkode: E-4BIB

Formelen for arealet til et trapes er $A = \frac{(a+b)}{2} h$



Lag en ny formel for høyden h i trapeset.

Løs oppgaven her

Løsningsforslag

Formelen for arealet av en trapes er:

$$A = \frac{(a+b)}{2} h$$

Vi multipliserer med 2 på begge sider av likhetstegnet:

$$A \cdot 2 = \frac{(a+b)}{2} \cdot 2 \cdot h$$

$$2A = (a+b) \cdot h$$

Vi bytter plass på uttrykkene, slik at h står på venstre side:

$$(a+b)h = 2A$$

Vi dividerer med $(a+b)$ på begge sider av likhetstegnet:

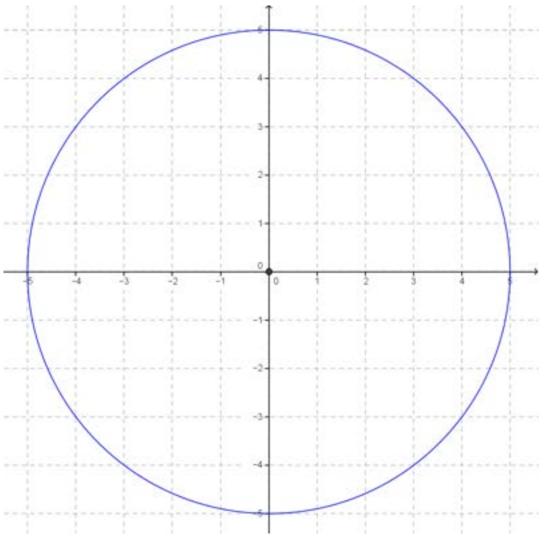
$$\frac{(a+b) \cdot h}{(a+b)} = \frac{2A}{(a+b)}$$

$$h = \frac{2A}{(a+b)}$$

Svar: Formelen for høyden er $h = \frac{2A}{(a+b)}$.

Oppgave 14 (1,5 poeng) Nettkode: E-4BIM

I koordinatsystemet nedenfor er det tegnet en sirkel med sentrum i origo og radius $5{,}0\ \text{cm}$.



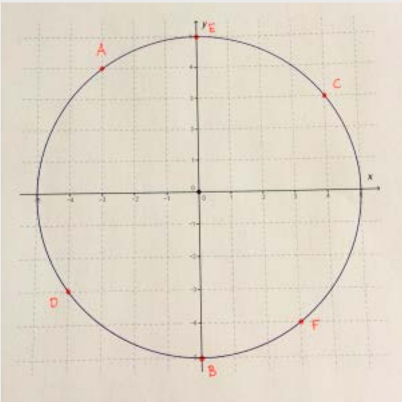
1. Marker disse punktene på sirkelen:

   $A\,(-3{,}4)$, $B\,(0,-5)$, $C\,(4{,}3)$, $D\,(-4,-3)$, $E\,(0{,}5)$, $F\,(3,-4)$
2. Trekk linjene AB og DE. Marker skjæringspunktet G mellom disse linjene.
3. Trekk linjene AF og CD. Marker skjæringspunktet H mellom disse linjene.
4. Trekk linjene EF og BC. Marker skjæringspunktet K mellom disse linjene.
5. Trekk linjen gjennom G, H og K. Denne linjen kalles Pascal-linjen.

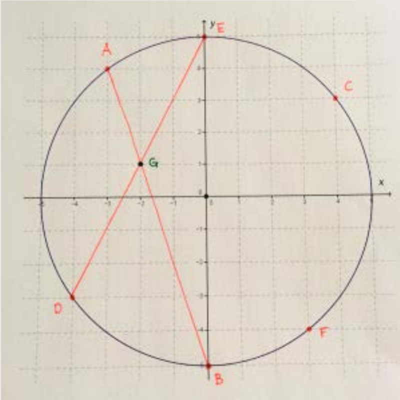
Bestem funksjonsuttrykket til Pascal-linjen: $y =$ ____

Løsningsforslag

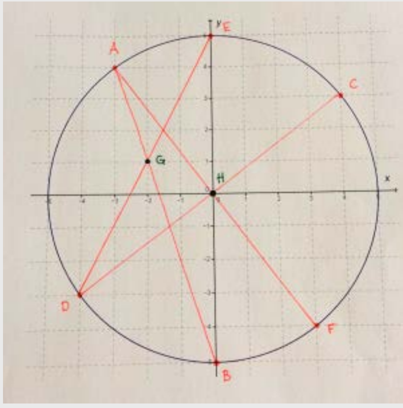
Vi leser av x- og y-verdiene og tegner punktene på figuren:



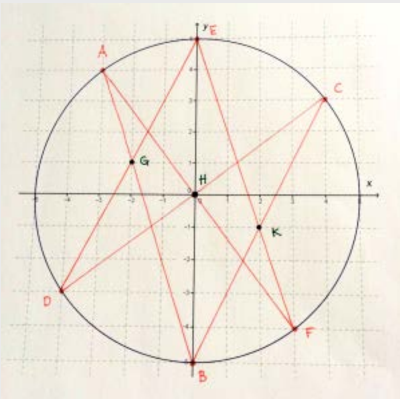
Vi trekker linjen AB, det vil si den rette linjen mellom punktene A og B, og vi trekker linjen DE. Skjæringspunktet mellom linjene er der linjene møter hverandre. Det punktet kaller vi G:



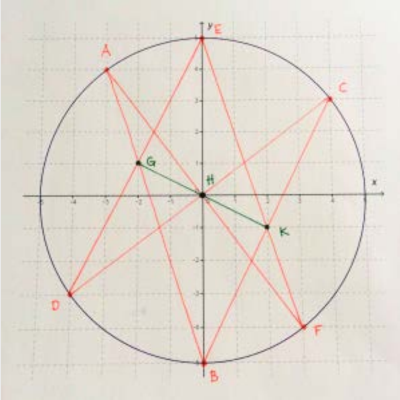
Nå trekker vi linjene AF og CD og finner skjæringspunktet, som vi kaller H:



Nå trekker vi linjene EF og BC og finner skjæringspunktet, som vi kaller K:



Vi tegner en rett linje og går igjennom punktene G, H og K:



Vi skal nå finne funksjonsuttrykket til *Pascal-linjen*. Herfra kan du bruke den alternative løsningen! Vi kan finne koordinatene til punktene G, H og K og sette opp en verditabell. Koordinatene finner vi ved å lese av x-verdien og y -verdien i punktet:

(x, y)	$(-2, 1)$	$(0, 0)$	$(2, -1)$
x	-2	0	2
y	1	0	-1

Vi ser at y-verdiene er x-verdiene multiplisert med $-\frac{1}{2}$. Funksjonsgrafen er derfor:

$$y = -0,5x$$

Svar: Funksjonen er $\underline{\underline{y = -0{,}5x}}$.

ALTERNATIV LØSNING

Vi ser at grafen er en rett linje, så den er er lineær graf. En lineær graf med stigningstall a og konstantledd b er på formen:

$$y = ax + b$$

Vi må finne konstantleddet og stigningstallet ved å lese av grafen. Konstantleddet er verdien av y der grafen krysser y-aksen, så konstantleddet i denne grafen er 0. Hvis vi beveger oss 1 bortover på x-aksen, så vi at vi går ned $0,5$ på y-aksen. Stigningstallet er altså $-0,5$. Funksjonsuttrykket er:

$$y = -0,5x + 0$$

$$y = -0,5x$$

Oppgave 15 (1,5 poeng) Nettkode: E-4BIP

3 paller bjørkeved og 6 paller granved koster 6 600 kroner til sammen.

4 paller med bjørkeved og 7 paller med granved koster 8 200 kroner til sammen.

Hva koster 1 pall med bjørkeved, og hva koster 1 pall med granved?

Løs oppgaven her

Løsningsforslag

1 pall med bjørkeved koster b kr og 1 pall med granved koster g kr. Vi vet hva 3 paller bjørkeved og 6 paller granved koster, og hva 4 paller bjørkeved og 7 paller granved koster. Dette kan vi sette opp som to likninger:

$3b + 6g = 6600 \ \text{(likning I)}$

$4b + 7g = 8200 \ \text{(likning II)}$

Vi dividerer likning I med 3. husk å dividere *alle* ledd med 3:

$$\frac{3b}{3} + \frac{6g}{3} = \frac{6600}{3}$$

$$b + 2g = 2200$$

Vi multipliserer likning I med 4, og trekker den fra likning II:

$$4b + 7g - 4 \cdot (b + 2g) = 8200 - 4 \cdot (2200)$$

$$4b + 7g - 4b - 8g = 8200 - 8800$$

$$-g = -600$$

Vi multipliserer begge sider med (-1) for å bli kvitt de negative fortegnene:

$$-g \cdot (-1) = -600 \cdot (-1)$$

$$\underline{g = 600}$$

Vi setter 600 inn for g i likning I:

$$b + 2g = 2200$$

$$b + 2 \cdot 600 = 2200$$

$$b + 1200 = 2200$$

Vi trekker fra 1200 på begge sider av likhetstegnet:

$$b + 1200 - 1200 = 2200 - 1200$$

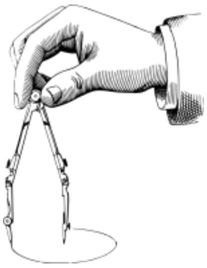
$$b = 1000$$

Vi får løsningen $g = 600$ og $b = 1000$.

Svar: 1 pall bjørkeved koster $1000\ \mathrm{kr}$ og 1 pall granved koster $600\ \mathrm{kr}$.

Oppgave 16 (3 poeng) Nettkode: E-4BIU

Konstruer ΔABC der $AB = 7{,}0\ \text{cm}$, $\angle ABC = 75^\circ$ og $BC = 5{,}0\ \text{cm}$.



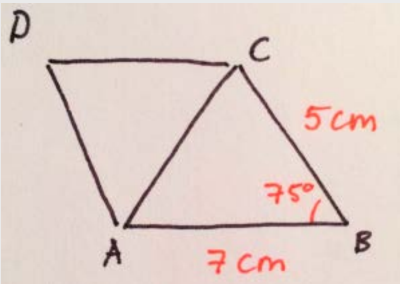
ΔABC er en del av parallellogrammet $ABCD$.

Lag hjelpefigur og konstruer parallellogrammet $ABCD$. Ta med en kort konstruksjonsforklaring.

Løs oppgaven her

Løsningsforslag

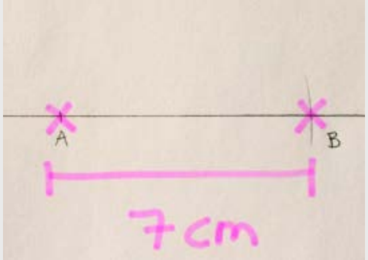
Hjelpefigur:

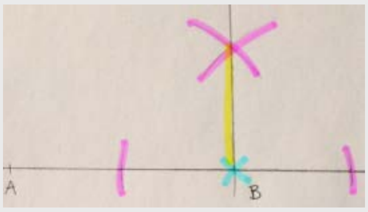


Konstruksjonsforklaring:

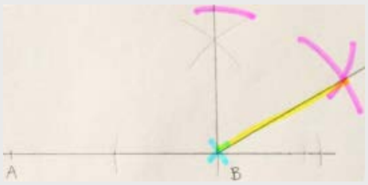
1. Setter av punktet A, setter av punktet B 7 cm fra A.
2. Konstruerer $60^\circ + 90^\circ$ i B, og halverer vinkelen.
3. Setter av punktet C $5\ \text{cm}$ fra B på det øvre vinkelbeinet.
4. Konstruerer en normal N på AB.
5. Konstruerer normalen fra punktet C på linjen N.
6. Setter av punktet D på normalen, $7\ \text{cm}$ fra C.
7. Trekker linjen AD.

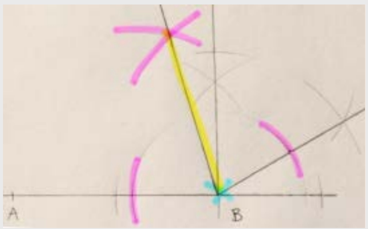
Her ser du skritt for skritt hvordan figuren er konstruert. Sett passerspissen i det blå krysset, slå de lilla linjene med passeren og trekk de gule linjene med blyant og linjal.



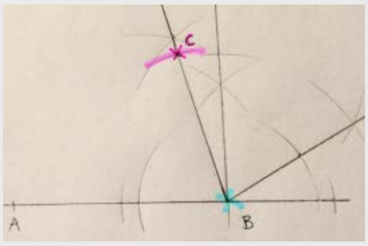


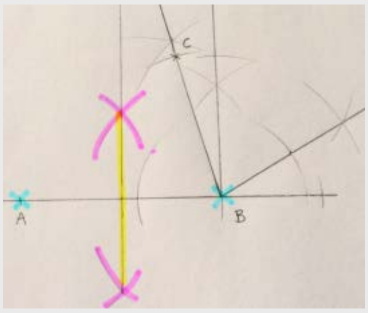
1. Vi setter av et punkt som ligger 7 cm fra A.
2. Vi konstruerer 90° i punktet B.



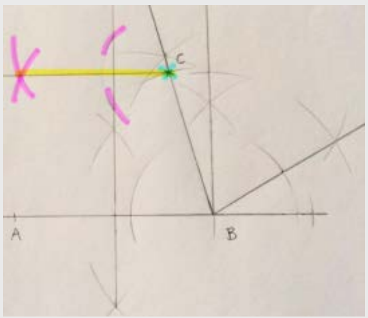


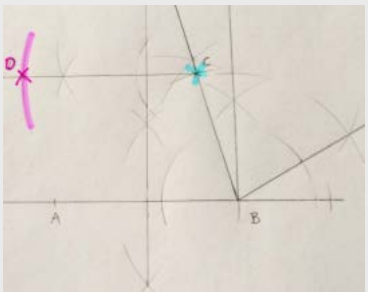
3. Vi konstruerer 60° på vinkelen.
4. Vi halverer den totale vinkelen.



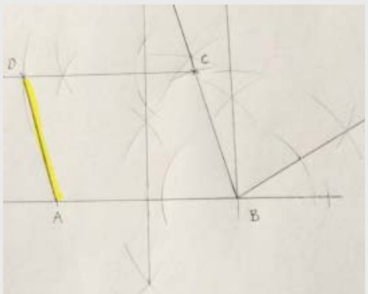


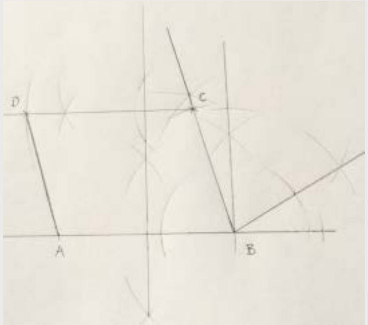
5. Vi markerer et punkt på vinkelbeinet som ligger 5 cm fra B.
6. Vi konstruerer midtnormalen mellom punktene A og B.





7. Vi konstruerer normalen fra punktet C ned på midtnormalen til AB.
8. Vi markerer et punkt på linjen som ligger 7 cm fra C.

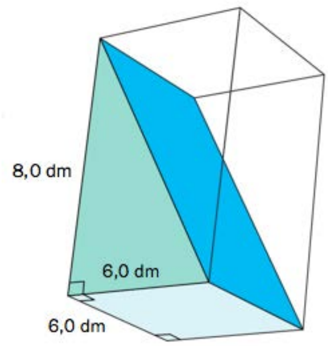




9. Vi trekker linjen mellom punktene A og D.

10. Konstruksjonen er ferdig.

Oppgave 17 (2 poeng) Nettkode: E-4BIY



Et rett, trekantet prisme har en grunnflate med form som et kvadrat med side 6,0 dm. Høyden er 8,0 dm.

Se fargelagt skisse.

a)
Regn ut volumet av det trekantede prismet.

Løs oppgaven her

Løsningsforslag a)

Formelen for volumet av et rett prisme med grunnflate G og høyde h er:

$$V = G \cdot h$$

Volumet av det trekantede prismet er halvparten av volumet av det firkantede prismet, så vi kan skrive volumet som:

$$V = \frac{G \cdot h}{2}$$

Der grunnflaten er kvadratet med sider $6,0$ dm og høyden er $8,0$ dm. Arealet av den kvadratiske grunnflaten er:

$$A = 6,0\text{dm} \cdot 6,0\text{dm} = 36,0\text{dm}^2$$

Vi setter inn $36,0\ \text{dm}^2$ for G og $8\ \text{dm}$ for h i formelen for volumet:

$V = G \cdot h = \frac{36,0\ \text{dm}^2 \cdot 8,0\ \text{dm}}{2} = 36,0 \cdot 4,0\ \text{dm}^3 = 144,0\ \text{dm}^3$

Svar: Volumet av det trekantede prismet er $144\ \text{dm}^3$.

ALTERNATIV LØSNING

Formelen for arealet av en trekant med grunnlinje g og høyde h er:

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

Vi bestemmer at grunnflaten i det trekantede prismet er trekanten med grunnlinje $6,0\ \text{dm}$ og høyde $8,0\ \text{dm}$, og at høyden av prismet er $6,0\ \text{dm}$. Arealet av grunnflaten er:

$A = \frac{6{,}0\ \text{dm} \cdot 8{,}0\ \text{dm}}{2} = \frac{48{,}0}{2}\ \text{dm}^2 = 24,0\ \text{dm}^2$

Volumet av det trekantede prismet med høyde $6,0\ \text{dm}$ er:

$V = G \cdot h = 24,0\ \text{dm}^2 \cdot 6,0\ \text{dm} = 144,0\ \text{dm}^3$

b)

Regn ut overflaten av det trekantede prismet.

Løs oppgaven her

Løsningsforslag b)

Først ser vi på **grunnflaten**. Den har form som et kvadrat med sider $6,0$ dm. Arealet er:

$6,0\ \text{dm} \cdot 6,0\ \text{dm} = 36{,}0\ \text{dm}^2$

Vi ser på de rettvinklede **trekantene** på sidene. De har lengde $6,0$ dm og høyde $8,0$ dm. Formelen for arealet av en trekant er:

$$A = \frac{a \cdot b}{2}$$

Det er to trekanter, arealet av begge er:

$2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = a \cdot b = 6,0\ \text{dm} \cdot 8,0\ \text{dm} = 48{,}0\ \text{dm}^2$

Vi ser på **rektangelet** på baksiden av figuren. Det har høyde $8,0\ \text{dm}$ og lengde $6,0\ \text{dm}$. Arealet er:

$6,0\ \text{dm} \cdot 8,0\ \text{dm} = 48{,}0\ \text{dm}^2$

Vi ser på **rektangelet** på diagonalen. Den ene siden er $6,0\ \text{dm}$. Den andre siden er hypotenusen i den rettvinklede trekanten. Lengden av denne siden finner vi ved å bruke Pytagoras læresetning:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

c er hypotenusen, og a og b er kateter. Vi skriver om formelen slik at det står c er lik:

$c^2 = a^2 + b^2$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Vi setter inn $6,0 \text{ dm}$ for a og $8,0 \text{ dm}$ for b:

$c = \sqrt{6,0^2 + 8,0^2} \text{dm}$

$c = \sqrt{36,0 + 64,0} \text{dm}$

$c = \sqrt{100,0} \text{dm} = 10,0 \text{dm}$

Sidene i rektangelet er $6,0 \text{ dm}$ og $10,0 \text{ dm}$. Arealet er:

$6,0 \text{ dm} \cdot 10,0 \text{ dm} = 60{,}0 \text{ dm}^2$

For å finne hele overflaten legger vi sammen arealene:

$\text{Overflate} = 36,0 \text{ dm}^2 + 48,0 \text{ dm}^2 + 48,0 \text{ dm}^2 + 60,0 \text{ dm}^2$

Vi setter opp summen:

$$\begin{array}{r} {}^{2} \\ 36 \\ +\ 48 \\ +\ 48 \\ +\ 60 \\ \hline =192 \\ \hline \end{array}$$

Svar: Overflaten av prismet er 192 dm^2**.**

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng) Nettkode: E-4BM5

Espen bruker disse ingrediensene for å bake 4 like store brød:

1,8 kg hvetemel
600 g grovt mel
50 g gjær
150 g havregryn
100 g havrekli
100 g olje
1,5 L vann (1,0 L vann veier 1,0 kg)

a)

Hvor mye veier ingrediensene til sammen?

Løsningsforslag a)

Vi ønsker å måle i kg. 1000 g er det samme som 1 kg, så 1 g er lik $0,001$ kg.

Vi bruker regneark og legger inn alle ingrediensene og gjør om til kilogram. Til slutt bruker vi *=SUM()* funksjonen for å legge alle sammen.

	A	B	C
1		Gram	Kilogram
2	Hvetemel		1,8
3	Grovt mel	600	=B3*0,001
4	Gjær	50	=B4*0,001
5	Havregryn	150	=B5*0,001
6	Havrekli	100	=B6*0,001
7	Olje	100	=B7*0,001
8	Vann		1,5
9			=SUM(C2:C8)
10			

D21 fx

	A	B	C	D
1		Gram	Kilogram	
2	Hvetemel		1,8	
3	Grovt mel	600	0,6	
4	Gjær	50	0,05	
5	Havregryn	150	0,15	
6	Havrekli	100	0,1	
7	Olje	100	0,1	
8	Vann		1,5	
9			4,3	
10				
11				

Svar: Ingrediensene veier $4{,}3$ kg.

b)

En annen dag vil Espen bake 5 brød. Han bruker samme mengde gjær som til 4 brød.

Hvor mye av hver ingrediens må Espen ha for å bake disse 5 brødene?

Løsningsforslag b)

For å finne ut hvor mye han trenger for å bake ett brød, må vi dividere vekten av ingrediensen med 4. Vi må så multiplisere med 5. Vi kan gjøre dette i ett trinn, og multiplisere alle ingrediensene med:

$$\frac{5}{4} = 1,25$$

Vi bruker regnearket fra deloppgave a og i en ny kolonne multipliserer vi alle ingrediensene med $1{,}25$.

	A	B	C	D	E
1		Gram	Kilogram	For 5 brød i kilogram:	For 5 brød i gram:
2	Hvetemel		1,8	=C2*1,25	=C2*1000*1,25
3	Grovt mel	600	=B3*0,001	=C3*1,25	=B3*1,25
4	Gjær	50	=B4	=C4	=B4
5	Havregryn	150	=B5*0,001	=C5*1,25	=B5*1,25
6	Havrekli	100	=B6*0,001	=C6*1,25	=B6*1,25
7	Olje	100	=B7*0,001	=C7*1,25	=B7*1,25
8	Vann		1,5	=C8*1,25	=C8*1000*1,25
9			=SUM(C2:C8)		
10					

Svar:

	A	B	C	D	E
1		Gram	Kilogram	For 5 brød i kilogram:	For 5 brød i gram:
2	Hvetemel		1,8	2,25	2250
3	Grovt mel	600	0,6	0,75	750
4	Gjær	50	0,05	0,05	50
5	Havregryn	150	0,15	0,1875	187,5
6	Havrekli	100	0,1	0,125	125
7	Olje	100	0,1	0,125	125
8	Vann		1,5	1,875	1875
9			4,3		
10					

Oppgave 2 (6 poeng) Nettkode: E-4BMA

Bruk regneark. Ta utskrift. Vis hvilke formler du har brukt.

Nedenfor ser du noen av utgiftene (i kroner) som en familie har en måned.

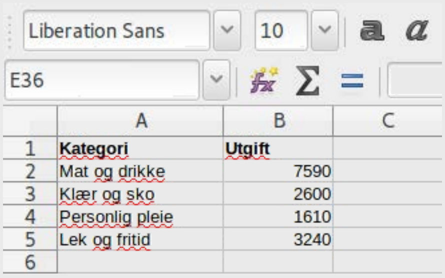
Kategori	**Utgift**
Mat og drikke	7 590
Klær og sko	2 600
Personlig pleie	1 610
Lek og fritid	3 240

a)

Bruk regneark og lag et sektordiagram som viser fordelingen av utgiftene.

Løsningsforslag a)

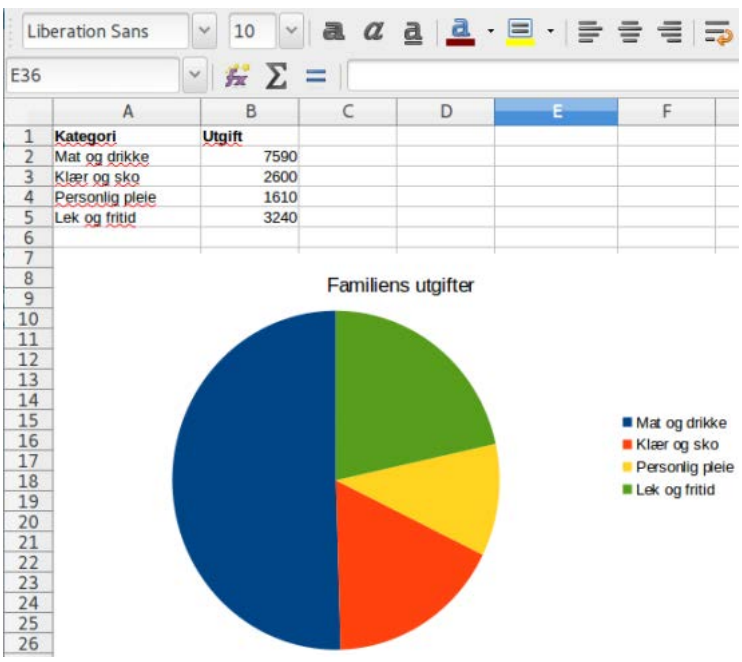
Vi skriver inn kategoriene og utgiftene i excel slik de er oppgitt i oppgaven.



	A	B	C
1	Kategori	Utgift	
2	Mat og drikke	7590	
3	Klær og sko	2600	
4	Personlig pleie	1610	
5	Lek og fritid	3240	
6			

Så markerer vi alle cellene og klikker på *Diagrammer*. Vi velger *Sektordiagram*.

Svar:



b)
Siv har kjøpt varer i butikken. Alle prisene er i kroner. Merverdiavgiften på 15 % er inkludert i prisene.

Butikken har «superlørdag» og gir 5 % rabatt på alle varer. Bruk regneark og regn ut hvor mye Siv må betale totalt for alle varene hun har kjøpt.

Løsningsforslag b)

Vi skriver inn mengden og prisen av hver vare.

E36

	A	B	C	D
28				
29	**Vare**	**Antall**	**Pris**	
30	Aspargesbunt	1	25,7	kr/kg
31	Pakke macaroni	1	24	kr
32	Appelsinjuice	4	17,4	kr
33	Lettmelk	5	18,3	kr
34	Laks	2,5	79,9	kr/kg
35	Smågodt	2,4	14,9	kr/hg
36				
37	**Rabatt**	**mva**		**Uten mva**
38	5,00%	15,00%		85,00%
39				
40	**Sum**	446,31		
41	Sum (med rabatt)	423,9945		
42				
43				

For finne summen av prisene uten rabatt, skriver vi

$$=SUM()$$

og markerer alle cellene med prisene.

Da finner vi summen av alle cellene. Summen multipliserer vi med 95% for å finne hvor mye hun skal betale etter rabatten.

Svar: Siv må betale $423{,}99$ kr.

c)

Bruk regneark og regn ut prisen på hver enkelt vare uten merverdiavgift.

Løsningsforslag c)

Merverdiavgiften er på 15% . Vekstfaktoren er lik 1 + 0,15, altså 1,15.

Prisen uten mva multiplisert med 1,15 gir pris med mva. Derfor finner vi pris uten mva ved å dividere prisen med mva med 1,15.

Svar:

Regneark

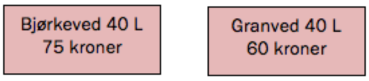
D11

	A	B	C	D
1	**Vare**	**Pris med mva**		**Pris uten mva**
2	Asparges	25.7	kr/kg	B2 / C10
3	Pakke macaroni	24	kr	B3 / C10
4	Appelsinjuice	17.4	kr	B4 / C10
5	Lettmelk	28.3	kr	B5 / C10
6	Laks	79.9	kr/kg	B6 / C10
7	Smågodt	14.9	kr/kg	B7 / C10
8				
9	Rabatt	mva	Uten mva	
10		0.15	1.15	

Regneark

	A	B	C	D
1	**Vare**	**Pris med mva**		**Pris uten mva**
2	Asparges	25.7	kr/kg	22.35
3	Pakke macaroni	24	kr	20.87
4	Appelsinjuice	17.4	kr	15.13
5	Lettmelk	28.3	kr	24.61
6	Laks	79.9	kr/kg	69.48
7	Smågodt	14.9	kr/kg	12.96
8				
9	Rabatt	mva	Uten mva	
10		0.15	1.15	

Oppgave 3 (3 poeng) Nettkode: E-4BMO



a)

Hva koster $1\ \mathrm{m}^3$ bjørkeved, og hva koster $1\ \mathrm{m}^3$ granved?

Løsningsforslag a)

Vi vet at $1\ \mathrm{L}$ er det samme som $1\ \mathrm{dm}^3$, og at $1\ \mathrm{m}$ er det samme som $10\ \mathrm{dm}$.

Vi ser for oss at en kubikkmeter er en kube med sider $1\ \mathrm{m}$. Den har volum:

$1\ \mathrm{m} \cdot 1\ \mathrm{m} \cdot 1\ \mathrm{m} = 1\ \mathrm{m}^3$

Gjør vi om til desimeter, er sidene $10\ \mathrm{dm}$ og volumet er:

$10\ \mathrm{dm} \cdot 10\ \mathrm{dm} \cdot 10\ \mathrm{dm} = 1000\ \mathrm{dm}^3$

$1\ \mathrm{L}$ er det samme som $1\ \mathrm{dm}^3$, så $1\ \mathrm{m}^3$ rommer $1000\ \mathrm{L}$. $40\ \mathrm{L}$ bjørkeved koster 75 kr og $40\ \mathrm{L}$ granved koster 60 kr. Vi regner ut hvor mange ganger $40\ \mathrm{L}$ går i $1000\ \mathrm{L}$:

$$\frac{1000}{40} = 25$$

Vi må multiplisere prisene for $40\ \mathrm{L}$ med 25:

$\text{Bjørkeved} \quad = 25 \cdot 75\ \text{kr} = 1875\ \text{kr}$

$\text{Granved} \quad = 25 \cdot 60\ \text{kr} = 1500\ \text{kr}$

Svar: $1\ \mathrm{m}^3$ Bjørkeved koster 1875 kr, og $1\ \mathrm{m}^3$ granved koster 1500 kr.

Oppgave 4 (3 poeng) Nettkode: E-4BMT

Vi kan regne ut varmemengden som forsvinner ut gjennom et glassvindu, med formelen nedenfor.

Vinduet er $1{,}10\ \mathrm{m}$ høyt og $0{,}80\ \mathrm{m}$ bredt.

$\boxed{V = 10{,}5 \cdot A \cdot T \cdot (I - U)}$

V: varmemengden målt i kilojoule (kJ)
A: arealet av vinduet målt i kvadratmeter (m^2)
T: antall timer som målingen varer
I: gjennomsnittstemperatur inne målt i celsiusgrader (°C)
U: gjennomsnittstemperatur ute målt i celsiusgrader (°C)

Et døgn var gjennomsnittstemperaturen inne $20^\circ\mathrm{C}$ og gjennomsnittstemperaturen ute $1^\circ\mathrm{C}$.

a)
Hvor stor varmemengde V forsvant ut gjennom glassvinduet dette døgnet?

Løsningsforslag a)

Formelen for varmemengden som forsvinner er:

$$V = 10,5 \cdot A \cdot T \cdot (I - U)$$

Vi vet at innetemperaturen er $20^\circ\mathrm{C}$ og utetemperaturen er $1^\circ\mathrm{C}$:

$I = 20^\circ C$ og $U = 1^\circ C$

Vi vil finne tapt varmemengde på ett døgn. Ett døgn er det samme som 24 timer, så antall timer er 24.

$T = 24\ \mathrm{h}$

Vinduet har form som et rektangel med sider $0,80$ m og $1,10$ m. Arealet er:

$A = 0,80\ \mathrm{m} \cdot 1,10\ \mathrm{m} = 0,88\ \mathrm{m}^2$

Vi setter inn for I, U, T og A i formelen for tapt varmemengde:

$V = 10{,}5 \cdot 0{,}88\ \mathrm{m}^2 \cdot 24\ \mathrm{h} \cdot (20 - 1)^\circ\mathrm{C} = 4213{,}44\ \mathrm{kJ}$

Svar: Varmetapet var $4213{,}44\,\mathrm{kJ}$ dette døgnet.

b)

Hva betyr det i praksis at verdien til V blir negativ?

Løsningsforslag b)

Vi ser på faktorene i formelen for å finne ut hvilken som kan være negativ.

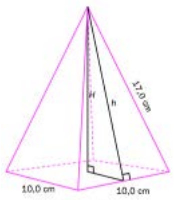
$10,5$ er en positiv konstant, og kan ikke være negativ.

A er arealet av vinduet, og kan heller ikke være negativ.

T er antall timer som målingen varer, og den kan heller ikke være negativ.

$(I - U)$ kan altså være negativ. Hvis U er større enn I, er $(I - U)$ negativ. Det betyr at det er varmere ute enn inne. Varmemengden går inn igjennom glassvinduet, i stedet for ut. Vi får et negativt varmetap, altså blir det varmere inne i rommet.

Oppgave 5 (6 poeng) Nettkode: E-4BMY



Figur 1: Pyramidekort

Miriam vil lage et pyramidekort. Grunnflaten i pyramidekortet er et kvadrat. Sideflatene i pyramidekortet er likebeinte trekanter. Se skisse på figur 1.

a)

Vis ved regning at høyden h i de fire likebeinte trekantene er ca. $16{,}2\ \mathrm{m}$.

Bruk dette til å regne ut overflaten til pyramidekortet.

Løsningsforslag a)

Høyden h er en katet i en rettvinklet trekant hvor hypotenusen er $17,0\ \mathrm{cm}$ lang og den andre kateten er halvparten av sidelengden av grunnflaten til pyramiden. Grunnflaten er et kvadrat med sider $10,0\ \mathrm{cm}$, så kateten er:

$\frac{10{,}0}{2}\ \mathrm{cm} = 5,0\ \mathrm{cm}$

Pytagoras læresetning er:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Vi skriver om Pytagoras setning slik at det står a er lik:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Vi trekker fra b^2 på begge sider av likhetstegnet:

$$a^2 + b^2 - b^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

Vi tar kvadratroten på begge sider:

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

Vi setter inn $17,0\ \mathrm{cm}$ for c og $5,0\ \mathrm{cm}$ for b:

$$a = \sqrt{17,0^2 - 5,0^2 \mathrm{cm}}$$

$a = \sqrt{289 - 25\ \mathrm{cm}} = \sqrt{264} = 16,24\ \mathrm{cm}$

Overflaten av pyramiden består av grunnflaten, som er et kvadrat, og fire like likebeinte trekanter. Kvadratet har sider $10,0\ \mathrm{cm}$, og arealet er:

$$10,0\text{cm} \cdot 10,0\text{cm} = 100,0\text{cm}^2$$

Formelen for arealet av en trekant er:

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

Hvor g er grunnlinjen og h er høyden. Trekantene har grunnlinje $10,0\ \text{cm}$ og høyde $16,2\ \text{cm}$. Summen av arealene av de 4 trekantene er:

$A = 4 \cdot \frac{g \cdot h}{2} = 2 \cdot g \cdot h = 2 \cdot 10,0\ \text{cm} \cdot 16,2\ \text{cm} = 324,0\ \text{cm}^2$

Den totale overflaten av pyramiden er:

$100,0\ \text{cm}^2 + 324,0\ \text{cm}^2 = 424,0\ \text{cm}^2$

Svar: Høyden h er ca $16{,}2\ \text{cm}$, og overflaten til pyramidekortet er $424{,}0\ \text{cm}^2$.

b)

Vis ved regning at høyden H i pyramidekortet er ca. $15{,}4\ \text{cm}$.

Regn ut volumet av pyramidekortet.

Løsningsforslag b)

Høyden H er katet i den rettvinklede trekanten med h som hypotenus. Den andre kateten er halve lengden i grunnflaten. Den andre kateten er:

$\frac{10,0}{2}\ \text{cm} = 5,0\ \text{cm}$

Hypotenusen er h, som er $16,2\ \text{cm}$ lang. Vi bruker Pytagoras læresetning for å finne lengden av H:

$H^2 + 5,0^2\ \text{cm}^2 = 16,2^2\ \text{cm}^2$

Vi trekker fra $5,0^2\ \text{cm}^2$ på begge sider av likhetstegnet:

$H^2 + 5,0^2\ \text{cm}^2 - 5,0^2\ \text{cm}^2 = 16,2^2\ \text{cm}^2 - 5,0^2\ \text{cm}^2$

$H^2 = 262,4\ \text{cm}^2 - 25,0\ \text{cm}^2 = 237,4\ \text{cm}^2$

Vi tar kvadratroten på begge sider av likhetstegnet:

$H = \sqrt{237,4}\ \text{cm}$

$H = 15,4\ \text{cm}$

Formelen for volumet av en pyramide er:

$$V = \frac{G \cdot H}{3}$$

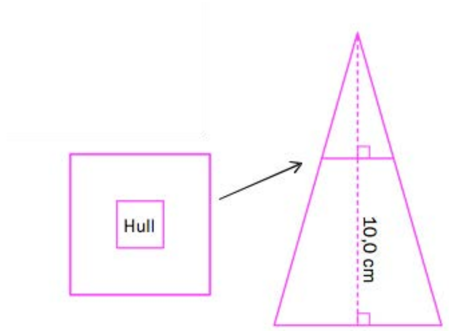
Der G er grunnflaten og H er høyden. Grunnflaten er kvadratet med areal $100,0$ cm^2, og høyden er $15,4$ cm. Vi setter $100,0$ cm^2 inn for G og $15,4$ cm inn for H i formelen for volumet av en pyramide:

$V = \frac{100,0 \cdot 15,4}{3}\ \mathrm{cm}^3 = 513,3\ \mathrm{cm}^3$

Svar: Høyden H i pyramidekortet er ca $15{,}4\ \mathrm{cm}$ og volumet er $513{,}3\ \mathrm{cm}^3$.

c)

Hullet i rammen som blir tredd over kortet, er et kvadrat. Hullet skal være så stort at rammen blir liggende $10{,}0\ \mathrm{cm}$ over grunnflaten i pyramidekortet. Se skisse på figur 2.



Figur 2: Ramme og tverrsnitt av pyramidekort

Regn ut hvor stort hullet i rammen må være.

Løsningsforslag c)

Den nye trekanten skal være $10,0\ \mathrm{cm}$ over grunnflaten i pyramiden. Høyden i den nye trekanten skal være $H - 10,0\ \mathrm{cm}$.

$H - 10,0\,\mathrm{cm} = 15,4\,\mathrm{cm} - 10,0\,\mathrm{cm} = 5,4\,\mathrm{cm}$

Vi ønsker å finne grunnlinjen i den nye trekanten, så vi bruker formlikhet:

$$\frac{\text{Grunnlinje liten trekant}}{\text{Høyde liten trekant}} = \frac{\text{Grunnlinje stor trekant}}{\text{Høyde stor trekant}}$$

Vi setter inn $10,0\ \mathrm{cm}$ for grunnlinjen i den store trekanten, $15,4\ \mathrm{cm}$ for høyden i den store trekanten og $5,4\ \mathrm{cm}$ cm for høyden i den lille trekanten:

$$\frac{g}{5,4} = \frac{10,0}{15,4}$$

Vi multipliserer med $5,4$ på begge sider av likhetstegnet:

$$\frac{g}{5,4} \cdot 5,4 = \frac{10,0}{15,4} \cdot 5,4$$

$$g = \frac{10,0 \cdot 5,4}{15,4} \text{ cm} = 3,5 \text{ cm}$$

Alle sideflatene er like store, så hullet må være et kvadrat med like lange sider.

Svar: Hullet må være et kvadrat med sider $3{,}5 \text{ cm}$.

Oppgave 6 (4 poeng) Nettkode: E-4BN3

Du kan spare mye tid og arbeid ved å bruke en digital graftegner.

Et alpinanlegg har to ulike heiskort:

1. Sesongkortet koster $3\ 600\ \text{kr}$
2. Dagskortet koster $295\ \text{kr}$

Kari kjøper et sesongkort og står på slalåmski x dager i løpet av vinteren.

Når Kari bruker sesongkortet, er prisen per dag gitt ved funksjonen

$f(x) = \frac{3600}{x}$

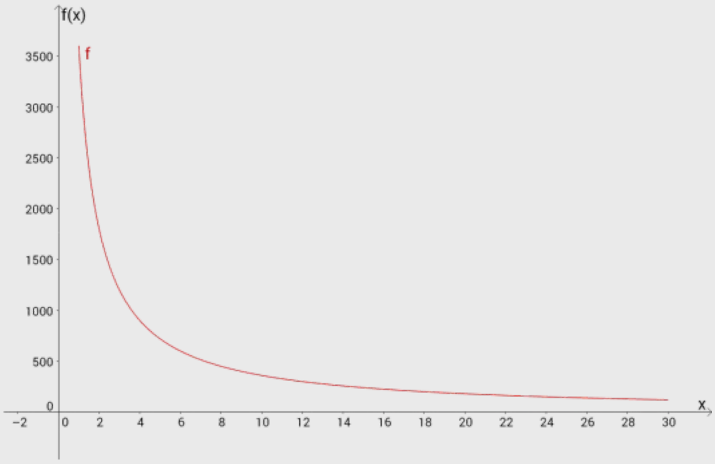
a)

Tegn grafen til funksjonen f når $1 \le x \le 30$.

Løsningsforslag a)

Bruk Geogebra og skriv inn kommandoen:

$Funksjon[3600/x, 1, 30]$



b)

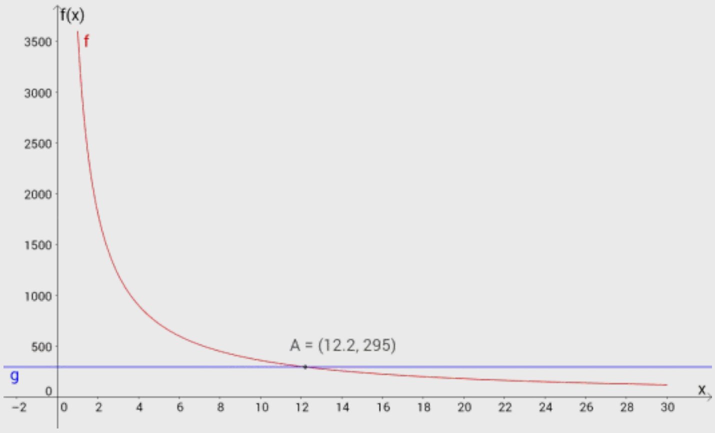
Bestem grafisk hvor mange hele dager Kari må bruke sesongkortet for at dette kortet skal lønne seg sammenliknet med dagskortet.

Løsningsforslag b)

Vi tegner enda en graf i samme koordinatsystem. Den nye grafen skal representere hvor mye Kari betaler dersom hun kjøper dagskort. Hvis hun kjøper dagskort, betaler hun $295\ \text{kr}$ hver gang hun er i alpinanlegget. Skriv inn kommandoen:

$$g(x) = 295$$

Klikk på *Skjæring mellom to objekter* og velg de to grafene. Punktet der grafene møtes er der sesongkortet begynner å lønne seg. Punktet er $(12.2, 295)$. Vi leser av x på dette punktet.



Svar: Kari må bruke sesongkortet 13 dager for at det skal lønne seg.

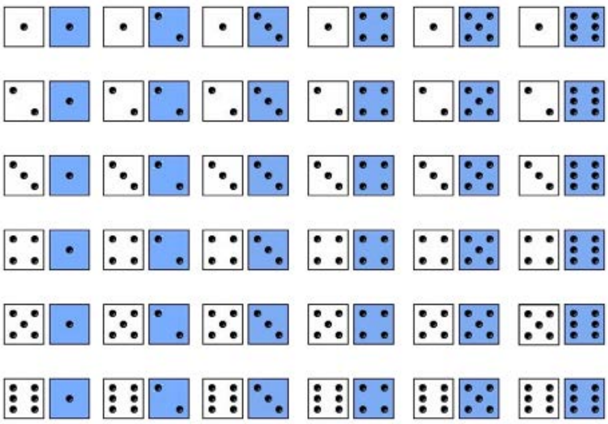
Oppgave 7 (3 poeng) Nettkode: E-4BNA

Blaise Pascal (1623–1662) var en fransk matematiker, fysiker, filosof og kristen skribent.

Pascal la grunnlaget for den moderne sannsynlighetsregningen.

Svært kjent er også «Pascals talltrekant».

Vi kaster 2 terninger. Utfallsrommet består av 36 mulige utfall.



a)
Bestem sannsynligheten for at summen av øynene på terningene blir 7.

Løsningsforslag a)

Vi teller antall måter summen av øynene kan bli 7 på:

$1 \text{ og } 6\,,\; 2 \text{ og } 5\,,\; 3 \text{ og } 4\,,\; 4 \text{ og } 3\,,\; 5 \text{ og } 2\,,\; 6 \text{ og } 1\,,$

Summen av øynene på terningene kan bli 7 på 6 ulike måter. Det er 36 mulige utfall. Vi bruker formelen for sannsynlighet for å finne sannsynligheten:

$$\mathrm{P}\left(7\right) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Svar: Sannsynligheten for at summen av øynene på terningene er 7 er $\frac{1}{6}$.

b)
Bestem sannsynligheten for at summen av øynene på terningene blir et primtall.

Løsningsforslag b)

Den minste mulige summen er 2, den største mulige summen er 12. Primtallene mellom 2 og 12 er:

$2\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 7 \text{ og } 11$

Les av utfallsrommet hvor mange måter vi kan få primtallene på:

Vi kan få summen 2 på én måte.

Vi kan få summen 3 på to måter.

Vi kan få summen 5 på fire måter.

Vi kan få summen 7 på seks måter.

Vi kan få summen 11 på to måter.

Antall gunstige utfall er:

$$1 + 2 + 4 + 6 + 2 = 15$$

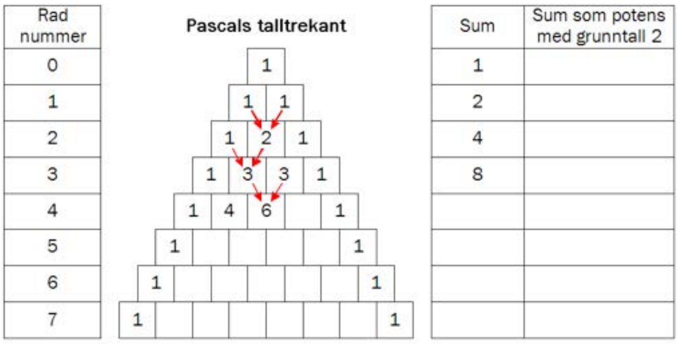
Antall mulige utfall er 36. Sannsynligheten for at summen av øynene på terningen er et primtall er:

$$\mathrm{P}\left(\text{primtall}\right) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Svar: Sannsynligheten for at summen av øynene er et primtall er $\frac{5}{12}$.

Oppgave 8 (4 poeng) Nettkode: E-4BNF

Nedenfor ser du en del av Pascals talltrekant. Den er bygget opp slik at summen av to nabotall i en rad er lik et tall i raden nedenfor.



a)

1. Skriv tallene som mangler på rad $4, 5, 6$ og 7 i Pascals talltrekant.
2. Skriv summene av tallene på hver rad.
3. Skriv hver sum som en potens med grunntall 2.

Løsningsforslag a)

Vi fyller ut resten av Pascals trekant:

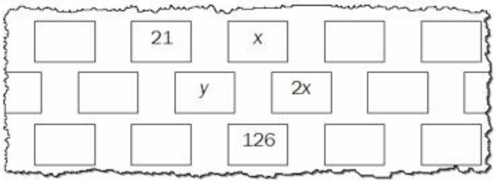
$$1$$
$$1\ 1$$
$$1\ 2\ 1$$
$$1\ 3\ 3\ 1$$
$$1\ 4\ 6\ 4\ 1$$
$$1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1$$
$$1\ 6\ 15\ 20\ 15\ 6\ 1$$
$$1\ 7\ 21\ 35\ 35\ 21\ 7\ 1$$

Summene av hver rad er:

Sum	Sum som potens med grunntall 2
1	2^0
2	2^1
4	2^2
8	2^3
16	2^4
32	2^5
64	2^6
128	2^7

b)

Figuren nedenfor viser et utsnitt av tre påfølgende rader i Pascals talltrekant.



Bruk figuren til å bestemme x og y ved å sette opp og løse et likningssystem.

Løsningsforslag b)

Vi får likningene:

$21 + x = y \ \ (\text{likning I})$

$y + 2x = 126 \ \ (\text{likning II})$

Vi adderer likning I til likning II:

$$y + 2x + 21 + x = 126 + y$$

Vi trekker fra y på begge sider av likhetstegnet:

$$y - y + 2x + 21 + x = 126 + y - y$$

$$3x + 21 = 126$$

Vi trekker fra 21 på begge sider av likhetstegnet:

$$3x + 21 - 21 = 126 - 21$$

$$3x = 105$$

Vi dividerer med 3 på begge sider av likhetstegnet:

$$\frac{3x}{3} = \frac{105}{3}$$

$$x = 35$$

Vi setter inn 35 for x i likning I:

$$21 + x = y$$

$$21 + 35 = y$$

$$y = 56$$

Svar: $\underline{\underline{x = 35 \ \text{og} \ y = 56}}$

ALTERNATIV LØSNING

Denne oppgaven kan også løses ved innsettingsmetoden. Vi bruker likning I til å finne et uttrykk for y:

$$21 + x = y$$

$$y = 21 + x$$

Vi setter inn dette uttrykket for y i likning II:

$$y + 2x = 126$$

$$21 + x + 2x = 126$$

$$21 + 3x = 126$$

Vi trekker fra 21 på begge sider av likhetstegnet:

$$21 - 21 + 3x = 126 - 21$$

$$3x = 105$$

Vi dividerer med 3 på begge sider av likhetstegnet:

$$\frac{3x}{3} = \frac{105}{3}$$

$$x = 35$$

Vi setter inn verdien for x i uttrykket for y:

$$y = 21 + x$$

$$y = 21 + 35$$

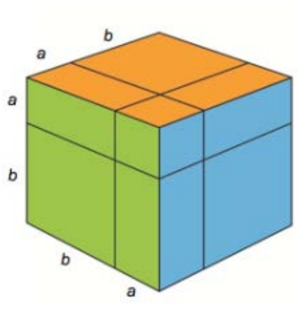
$$y = 56$$

Oppgave 9 (4 poeng) Nettkode: E-4BNJ

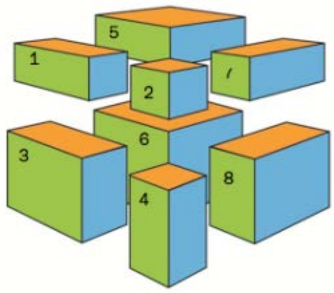
Algebra-kuben

En kube har side $a + b$. Se figur 1.

Kuben kan deles opp i åtte nummererte, rette prismer. Se figur 2.



Figur 1



Figur 2

Prisme 1 har volum a^2b , prisme 2 har volum a^3 og så videre.

a)
Bestem et uttrykk for volumet av hvert av de åtte nummererte, rette prismene.

Skriv summen av de åtte prismene så enkelt som mulig.

Løsningsforslag a)

Prisme 1 har sidelengder a, a og b:

$$V_1 = a \cdot a \cdot b = a^2b$$

Prisme 2 har sidelengder a:

$$V_2 = a \cdot a \cdot a = a^3$$

Prisme 3 har sidelengder b, b og a:

$$V_3 = a \cdot b \cdot b = ab^2$$

Prisme 4 har sidelengder a, a og b:

$$V_4 = a \cdot a \cdot b = a^2b$$

Prisme 5 har sidelengder a, b og b:

$$V_5 = a \cdot b \cdot b = ab^2$$

Prisme 6 har sidelengder b:

$$V_6 = b \cdot b \cdot b = b^3$$

Prisme 7 har sidelengder a, a og b:

$$V_7 = a \cdot a \cdot b = a^2 b$$

Prisme 8 har sidelengder a, b og b:

$$V_8 = a \cdot b \cdot b = ab^2$$

Summen av volumene er:

$$V = a^2 b + a^3 + ab^2 + a^2 b + ab^2 + b^3 + a^2 b + ab^2$$

Vi trekker sammen leddene så mye som mulig. Husk at $a \cdot b = b \cdot a$:

$$V = a^3 + 3a^2 b + 3a^2 b + b^3$$

Hvis vi ser nærmere på tallkoeffisientene i leddene i den endelige summen, kan vi se at det er de samme som vi finner i den tredje raden i Pascals trekant.

Svar: Summen av de åtte prismene er $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$**.**

b)

Regn ut $(a+b)^n$ når $n = 0, 1, 2$ og 3.

Hvilken sammenheng mellom utregningene dine og Pascals talltrekant finner du?

Løsningsforslag b)

Vi har uttrykket

$$(a+b)^n$$

som vi skal regne ut for $n = 0, 1, 2$ og 3.

En potens er grunntallet multiplisert med seg selv like mange ganger som eksponenten tilsier. For eksempel:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Et hvilket som helst tall eller uttrykk opphøyd i 0 er lik 1. Vi regner derfor:

$$(a+b)^0 = 1$$

Et uttrykk opphøyd i 1 er uttrykket selv:

$$(a+b)^1 = (a+b) = a + b$$

Vi regner ut:

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Vi kjenner igjen dette som andre kvadratsetning.

Vi regner ut:

$$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = (a+b)\cdot(a+b)^2$$

Vi vet fra $n = 2$ at

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Dette setter vi inn:

$$(a+b)\cdot(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Vi har at:

$$(a+b)^3 = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$$

Vi kjenner igjen summen som resultatet fra oppgave a). Kuben på figuren har sidelengder $(a+b)$. Formelen fra a) sier at volumet av kuben er

$$(a+b)^3$$

Altså er volumet av kuben summen av volumene til de små prismene. Vi ser også at for $n = 0$ får vi 1 som er hele første rad i Pascals trekant. For $n = 1$ får vi $a + b = 1 \cdot a + 1 \cdot b$ og tallfaktorene er de samme som i den andre raden i Pascals trekant. Slik kan vi fortsette.

Svar: Vi ser at tallkoeffisientene foran de ulike leddene for *n* samsvarer med tallene i *n*+1-te rad i Pascals trekant.