OPPGAVER FRA ABELS HJØRNE I DAGBLADET

SETT 29

DAG 1

1. Nils abonnerer på Aftenposten, og en morgen består avisen av fire deler. Hvis Nils leser en del av gangen, i hvor mange forskjellige rekkefølger kan han lese de fire delene?

   A)4 B) 6 C) 12 D) 24 E) 64

2. Familiene Hansen og Olsen var på ferie sammen. Familiene kjørte i hver sin bil, men holdt hele tiden følge. Før de reiste, hadde bilen til Olsen kjørt 25% lenger enn bilen til Hansen, men etter ferieturen hadde dette sunket til 20%. Olsens bil hadde etter ferien totalt kjørt 18000 km. Hvor langt kjørte familiene Olsen og Hansen på ferieturen?

   A)30 mil B) 75 mil C) 150 mil D) 300 mil E) 360 mil

Løsninger:

1. *D.* Til å begynne med har Nils fire deler å velge mellom. Etter at han har lest en del, så må han velge mellom de tre resterende. Deretter må han velge mellom de to som er igjen. Til sammen gir dette $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ mulige rekkefølger.

2. *D*. Etter ferien hadde Olsens bil kjørt 20% lenger enn Hansens bil. Siden Olsens bil hadde kjørt 18000 km, må Hansens bil ha kjørt 15000 km. Differansen på 3000 km må ha vært den samme før ferien, og da utgjorde dette 25% av det bilen til Hansen hadde kjørt. Hansens bil hadde dermed kjørt 12000 km før ferien. På ferieturen kjørte de derfor $15000\text{ km} - 12000\text{ km} = 3000\text{ km} = 300\text{ mil}$.

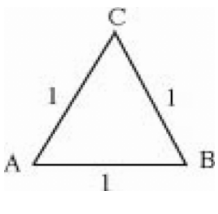
DAG 2

1. Stein har et brev som koster 27 kroner å sende. Han har bare frimerker pålydende 1 kr, 2 kr, 5,50 kr, 8 kr og 20 kr, men han har mange av hver type. Hva er det minste antall frimerker Stein må sette på konvolutten for at brevet skal bli frankert med nøyaktig 27 kroner?

   A)3 B) 4 C) 5 D) 8 E) 27

2. Hva er arealet av en trekant der alle sidene er 1?

   A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$



Løsninger:

1. B. Stein kan frankere med to frimerker til 8 kr og to frimerker til 5,50 kr, altså med fire frimerker. Det er ikke mulig å få det til med færre frimerker. I så fall måtte han ha brukt 20-kroners merket (siden tre 8-kroners merker blir for lite), og det er lett å se at han ikke kan få til de resterende 7 kronene ved å kombinere to av de øvrige merkene.

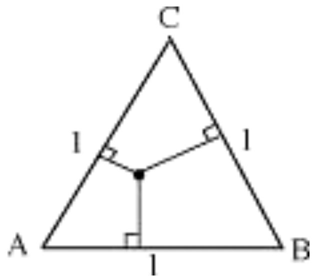
2. E. La D være midtpunktet på AB. Trekanten ADC er nå rettvinklet, og ved Pythagoras er $(CD)^2 + (\frac{1}{2})^2 = 1^2$. Dette gir at $CD = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Siden areal er grunnlinje ganger høyde delt på 2, får vi at arealet er $1 \cdot \frac{CD}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

DAG 3

1. Hvis kursen på en amerikansk dollar er 7,50 kroner, og kursen på en svensk krone er 0,80 kroner, hva er da kursen på en dollar i Sverige (i svenske kroner)?

   A)6 kr B) 9 kr C) 9,375 kr D) 10 kr E) 10,667 kr

2. På figuren er ABC en likesidet trekant med sidelengde 1, og P er et punkt inne i trekanten. (Vi så i går at denne trekanten har areal ($\frac{\sqrt{3}}{4}$) Fra punktet P er det trukket normaler ut til hver av de tre sidene. Hva er summen av lengdene til disse tre normalene?



   A)1 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) Det er umulig å avgjøre

Løsninger:

1. C. En amerikansk dollar er verdt $7{,}5 : 0{,}8 = 9{,}375$ svenske kroner.

2. D. Tenk deg ABC inndelt i de tre mindre trekantene ABP, BCP og APC. Alle disse trekantene har 1 som grunnlinje, og normalen fra P som høyde. Summen av arealene av disse trekantene er dermed $1 \cdot \frac{S}{2}$, der S er summen av lengdene av de tre normalene. Siden arealet av trekanten er $\frac{\sqrt{3}}{4}$, så følger det at $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

DAG 4

1. Monica skal kjøpe ny PC. Forhandleren tilbyr 10% rabatt, og i tillegg 700 kroners avslag dersom hun betaler med en gang. Monica synes dette høres bra ut, og kjøper PC'en med forhandlerens prisavslag. Hun betaler 15% mindre enn normal utsalgspris. Hvor mye måtte Monica betale for sin nye PC?

   A) 5900 kr B) 7900 kr C) 10200 kr D) 11900 kr E) 13600 kr

2. To primtall med differanse 2 kalles primtallstvillinger. Noen eksempler på primtallstvillinger er 3 og 5, 5 og 7, 11 og 13, 17 og 19, 29 og 31. Man tror at det finnes uendelig mange slike par, men ennå har ingen greid å bevise det. Hvis vi ser bort fra det første eksempelet over, så er tallet mellom tvillingene (henholdsvis 6, 12, 18 og 30) delelig med 6. Kan du forklare hvorfor det må være slik også for alle andre tvillingpar?

Løsninger:

1. *D*. Opplysningene i oppgaven forteller oss at 700 kroner tilsvarer 5% av den opprinnelige prisen. PC'en kostet dermed 14000 kroner før forhandleren tilbød rabattene. Prisen etter 10% rabatt blir da $14000 - 1400 = 12600$ kroner, og etter avslaget på 700 kroner kostet PC'en 11900 kroner.

2. Siden alle primtall større enn 2 er oddetall, så vil tallet mellom tvillingene helt sikkert være delelig med 2. Hver gang vi har tre heltall på rad, så vil nøyaktig ett av dem være delelig med 3. Hvis vi har et tvillingpar større enn 3 og 5, vil ingen av tvillingene være delelig med 3 (siden tallene er primtall), så derfor må tallet imellom være delelig med 3. Siden tallet i mellom tvillingene er delelig med både 2 og 3, så er det også delelig med 6.

DAG 5

1. En butikk annonserer et produkt med "ta 5 – betal for 4". Hvor stor rabatt får man dersom man benytter seg av dette tilbudet?

   A)16,7 % B) 20 % C) 22,5 % D) 25 % E) 40 %

2. Hvis vi ganger et heltall med seg selv får vi et kvadrattall. De første kvadrattallene er 1, 4, 9, 16 og 25. Hvis vi ganger heltallet med seg selv en gang til, får vi det vi kaller kubikktall. Disse er 1, 8, 27, 64, 125 osv. Hvis vi legger til 1 på hver av disse tallene får vi tallfølgen 2, 9, 28, 65, 126 osv. Legg merke til at det første tallet i følgen, 2, er delelig med 2, 9 er delelig med 3, 28 er delelig med 4, 65 er delelig med 5, og 126 er delelig med 6. Er dette en tilfeldighet? Eller vil det alltid være slik at tallet $n \cdot n \cdot n + 1$ er delelig med $n + 1$?

Løsninger:

1. Tenk deg at produktet normalt koster 100 kroner. Med dette tilbudet kan man få fem stykker for 400 kroner, dvs. man betaler 80 kroner stykket. Rabatten er altså på 20 kroner, og det tilsvarer 20 %.

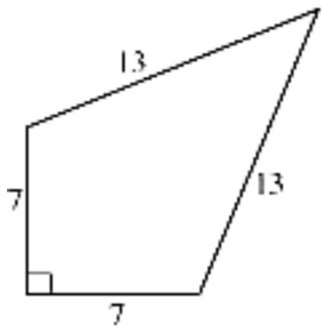
2. Det er ingen tilfeldighet. Det vil alltid være slik at $n^3 + 1$ er delelig med $n + 1$, og det kan man se ut fra den algebraiske identiteten $n^3 + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1)$.

DAG 6

1. Hvilket tall er slik at hvis vi legger til 5, så får vi det samme som om vi ganger med 5?

A)0 B) 1 C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{5}{4}$ E) 10

2. Hva er arealet av denne firkanten?

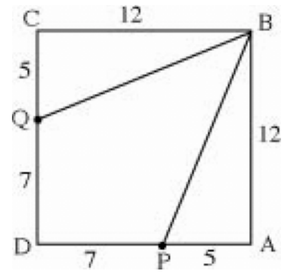


A)78 B) 81 C) 84 D) 91 E) 98

Løsninger:

1. D. Hvis dette tallet er x, så sier oppgaven at $x + 5 = 5x$. Løser vi denne likningen, får vi $x = \frac{5}{4}$.

2. C. Figuren under viser et kvadrat med sidelengde 12, der avstanden fra A til P er 5. Siden PAB er rettvinklet får vi ved Pythagoras at $BP^2 = AP^2 + AB^2 = 25 + 144 = 169$. Dermed er $BP = 13$, slik at firkant $DPBQ$ har samme mål som firkanten i oppgaven. Arealet av kvadratet er $12 \cdot 12 = 144$, mens arealet av trekant PAB (og BCQ) er $5 \cdot \frac{12}{2} = 30$. Arealet av firkant $DPBQ$ blir dermed 144 - 30 - 30 = 84.

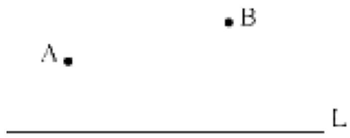


DAG 7

1. Hvis du kaster to terninger, hva er da sannsynligheten for at summen blir et partall?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{9}$ D) $\frac{6}{11}$ E) $\frac{19}{36}$

2. På figuren er det tegnet inn to punkter, A og B, og en linje L. Tenk deg at du er i punktet A, og at du skal gå til punktet B, men at du må innom linjen L på veien. Hvordan kan du geometrisk finne den korteste veien?



Løsninger:

1. A. Tenk deg at du kaster den ene terningen først. Uansett utfallet av dette kastet, er det nøyaktig tre av sidene på den andre terningen som gjør at summen blir et partall. Sannsynligheten for at summen blir et partall, er dermed $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2. La punktet C være speilingen av B om linjen L. Det å gå fra A til B via L, er like langt som å gå fra A til C via L. Men den korteste veien fra A til C er langs en rett linje. For å komme raskest fra A til B, må du altså først gå i retning C inntil du treffer L, og deretter skal du gå rett til B.