0. Innledning

Spillteori som disiplin begynte med publiseringen av Von Neumann og Morgensterns bok *The Theory of Games and Economic Behavior* i 1944. Feltet fattet straks stor interesse og det ble i løpet av kort tid publisert en mengde resultater. Ved siden av å være en god teori for å beskrive adferd til rasjonelle aktører i et marked, kunne spillteori brukes til å systematisere hva som egentlig forgår under mer dagligdagse spill som Chickenplay og Poker. Spillteorien satte også klassiske problemstillinger som Fangenes dilemma inn i en matematisk modell-sammenheng. I Chickenplay kjører to stykker mot hverandre i bil og den er "mest mann" som svinger unna sist. Fangenes dilemma går ut på at to fanger avhøres hver for seg. Hvis ingen tilstår får de forholdsvis lav straff begge to. Hvis begge tilstår får de noe høyere straff begge to. Hvis bare en tilstår går han fri mens den som ikke tilstår får lang straff. Spørsmålet er hva de skal gjøre, tilstå eller holde munn? Hadde de bare vist hva den andre gjorde…

I dette kompendiet skal vi studere disse spillene nærmere. Det skal vi gjøre i en generell setting og så bruke disse og forskjellige andre velkjente spill som eksempler. Gjennomføringen vil være firedelt. Først skal vi studere åpne spill eller spill med perfekt informasjon uten noen form for lotteri. Det betyr at vi kan beskrive alle mulige strategier og derved ha full oversikt over alle mulige forløp. Hvert forløp har et utbytte for hver spiller, gjerne i form av ett av to, vinn (=1) eller tap (=0). Spillene beskrives ved beslutningstrær og vi innfører begrepet "baklengs induksjon" for å finne løsninger til spillet, dvs. strategier som for en spiller gir sikker gevinst. Eksempler på denne type spill er Nim, Tripp-trapp-tresko og Sjakk(!)

De fleste spill lar seg ikke beskrive på denne enkle måten. I spill hvor vi bruker terning, mynt eller andre innslag av tilfeldigheter, får vi en noe mer komplisert situasjon. I kapittel 2 skal vi introdusere sannsynlighetsteori og se hvordan vi kan inkorporere dette i beslutningstrærne. Nå er det ikke lenger mulig å finne klare vinnerstrategier, men vi kan likevel gjennomføre en analyse hvor vi kommer fram til en verdi for spillet. Denne verdien sier noe om sannsynligheten for at en spiller vinner.

Strategier er et sentralt begrep i spillteori. Hvis vi har rene strategier kan vi alltid beskrive spillets forløp, enten vi tar hensyn til en stokastisk variabel eller ikke. Imidlertid er det ikke alltid slik. Spillere som har flere strategier å velge mellom kan alltid gjøre et valg, og de vil selvfølgelig ikke informere motspillerne om hva slags strategi de velger. Resultatet av spillet vil dermed ikke bare være avhengig av spillerens eget valg av strategi, men også av motpartens. Og det kan være at det hadde lønt seg å velge en annen strategi hvis man visste hvilken strategi motstanderen valgte. Et godt eksempel på et slik spill med imperfekt informasjon (eller lukket spill) er Poker. En strategi kan være alltid å satse så mye som kortene tilsier, det vil si at vi satser mye på gode kort og lite på dårlige kort. En annen strategi kan være å satse motsatt, nettopp for å skjule hva slags kort man har og derved få motstanderen til å satse sine penger ut fra gale forutsetninger. En slik strategi ville fort bli gjennomskuet og motstanderen ville forholde seg til den nye situasjonen og man var like langt. En god pokerspiller vil imidlertid bruke en blandet strategi. Av og til satse etter kortene og av og til bløffe. Uforutsigbarheten gjør at motstanderen ikke vet hva som skjer og hun kan dermed ikke forholde seg rasjonelt til spillerens satsing.

Dette er et typisk eksempel på et spill med imperfekt informasjon. Slike spill kan vi også sette opp en modell for, men nå blir det hele selvfølgelig mer komplisert. I vår gjennomgang skal vi ved siden av å beskrive denne situasjonen i det som kalles 2×2-spill, dvs spill med to deltakere som hver har to strategier å velge mellom, også lete etter såkalte Nash-likevekter. Dette er strategier som optimaliserer utfallet av spillet for alle deltakerne. Slike likevekter vil i denne situasjonen alltid eksistere og vil på en måte være bestemmende for spillernes valg av strategier. Spill av denne typen er Chickenplay, Fangenes dilemma og Slaget mellom kjønnene.

I den siste delen har vi listet opp en del andre spill, sagt noe om hvordan de spilles og dessuten om eventuelle vinnerstrategier. I tillegg har vi plassert spillene i forhold til det generelle landskapet vi har malt innledningsvis, åpne vs. lukkede og strategispill vs. lottreier.

Vår gjennomgang av spillteorien, slik Von Neumann og Morgenstern introduserte den i det nest siste krigsåret, må nødvendigvis bli nokså mangelfull. Skal det gjøres grundig vil det måtte involvere mye matematikk, solide bakgrunnskunnskaper i økonomi og betydelig mer tid enn vi har til rådighet. Dette blir derfor bare som en lite gløtt å regne, men forhåpentligvis kan det gi en innsikt og en interesse for å se litt mer på dette feltet av matematikk, det eneste hvor menneskelig adferd og (ir-)rasjonalitet inngår som en viktig ingrediens.

Vi håper heftet kan være til glede og nytte og at det kan være til hjelp i arbeidet med å finne nye og lærerike måter å formidle matematikk på.

Oslo, 15/12-2000
Arne B. Sletsjøe

1. Spillteori

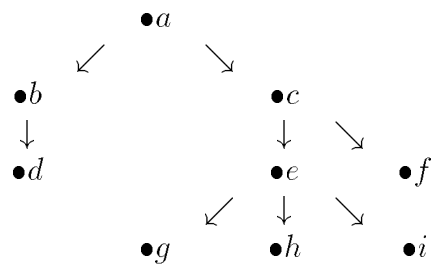
Spillteori går i korte trekk ut på å studere ulike former for spill, avdekke strategier og løsninger, avgjøre ut om det finnes måter å vinne spillene på, og ikke minst å forstå hvordan spillene faktisk er bygget opp.

Vi skal klassifisere spill på to forskjellige måter , åpne vs. lukkede spill og strategispill vs. lotterier. I et åpent spill (eller spill med perfekt informasjon) har alle spillerne full innsikt i hverandres strategier og legger det til grunn for egne valg. I praksis betyr dette at spillerne gjør sine trekk annenhver gang og i full offentlighet. De fleste "vanlige spill "er av en slik natur. Som oftest er det kompleksiteten og det enorme antall muligheter som gjør spillene interessante og som sikrer at de ikke blir "oppbrukt". Et velkjent eksempel på et slikt åpent spill er sjakk. Hvit har til sammen 20 muligheter å velge mellom til sitt første trekk og sort har det samme i sitt første. Det gir 400 muligheter for åpningsrunden. Fortsetter vi å telle på denne måten er det lett å innse seg at selv ikke den kraftigste datamaskin klarer å holde styr på alle muligheter. Det er imidlertid alltid et endelig antall valg som kan gjøres og i teorien kan vi tenke oss at samtlige var beskrevet og kjent for enhver spiller. I lukkede spill gjør spillerne sine trekk enten samtidig, eller de gjør trekkene etter tur med hemmelige strategivalg. Dermed vet ikke den ene spilleren hva den andre kommer til å gjøre og omvendt. "Stein, saks og papir" er et typisk eksempel på et slikt spill og her blir psykologisk insikt en sukssessfaktor. Stein, saks og papir går ut på at to spillere samtidig holder fram hånda, enten flat (papir), knyttet (stein) eller med to fingre sprikende som i V-tegnet (saks). Saks vinner over papir, papir vinner over stein og stein vinner over saks. Det er kombinasjonen av de to spillerenes valg som avgjør utfallet.

Den andre klassifikasjonen, strategispill vs. lotterier tar hensyn til hvorvidt tilfeldigheter er innbakt i spillet, dvs. om hele eller deler av spillet baserer seg på å kaste mynt, slå terning, trekke kort eller liknende. Enkelte velkjente spill er rene lotterier, slik som f.eks. Stigespill (et spill hvor hver spiller har en brikke de flytter på et 10 x 10 ruters brett i henhold til hvor mange øyne de får på terningen. I enkelte ruter får man klatre opp noen stiger og i andre ruter må man klatre ned noen stiger. Førstemann som kommer til toppen vinner). Andre spill fordrer en viss grad av strategivalg, slik som Ludo (hvis man har mulighet kan man velge hvilken brikke man skal flytte). Andre eksempler på lotterier er lotterier! Imidlertid er ikke et lotteri som Lotto noe åpent spill. Det er selvfølgelig tilfeldig hvilket tall som trekkes ut, men størrelsen på gevinsten er avhengig av hvor mange andre som har valgt den samme kombinasjonen. F.eks. er det ukentlig ca. 3 000 som tipper rekka 1,2,3,4,5,6,7 og hvis denne gikk inn ville førstepremien være ca. 3 000 kroner!

For å beskrive åpne spill kan vi bruke det som kalles grafteori. Dette viser seg å være en effektiv måte å systematisere alle muligheter og valg som kan gjøres etter hvert som spillet skrider fram. Grafteorien ble grunnlagt av Euler på 1700-tallet (for helt andre formål) og består i å studere bestemte figurer, kalt **grafer**. En graf er en geometrisk figur som består av et antall **noder** eller **hjørner** (gjerne tegnet som svarte prikker: $\bullet$) og et passende antall **kanter** mellom nodene (tegnet som piler: $\rightarrow$). Et eksempel på en graf er et kart som beskriver alle Braathens flyruter, slik vi finner det i "stolryggen foran dem". Flyplassene er nodene og de rette strekene mellom nodene er kantene. Spillets gang i et åpent spill er beskrevet av et **beslutningstre**. Et beslutningstre er en rettet, sammenhengende graf uten sykler, dvs. en figur bestående av noder og rettede kanter mellom nodene, laget på slik måte at vi aldri går i ring. Rettet betyr i denne sammenheng at kantene er piler med et startpunkt og et endepunkt. Beslutningstreet til sjakk ville se ut som en enorm samling av svarte prikker med piler mellom, hvor den første prikken har 20 piler som går ut fra den og til nye prikker og hver av disse igjen har 20 piler til enda nye prikker. Antallet piler som går ut fra en svart prikk sier noe om hvor mange mulige valg spilleren kan gjøre på den stillingen.

Nodene i spillet markerer altså punkter hvor en av spillerne kan gjøre et valg. En kant markerer en vei fra en node til en annen node. Figur 1 viser en illustrasjon av et beslutningstre for et tenkt spill.



Figur 1. Eksempel på et spilltre

En **forløper** ν_0 til en node ν_1 er en node som er slik at det finnes en vei av kanter fra ν_0 til ν_1. En **etterfølger** er definert motsatt. I figuren er f.eks. noden a en forløper til alle de andre. En **initial** node er en node uten forløpere (i vårt tilfelle der hvor spillet starter, dvs. i a) og en **terminal** node er en node uten etterfølgere (i figuren er nodene d, g, h, i terminale). Vi kan gi følgende karakteristikk av et beslutningstre, og som viser seg å være hensiktsmessig for vårt formål:

(1) Enhver node har maksimalt en forløper, og er forbundet med den med en kant.
(2) Ingen node etterfølger seg selv.
(3) Enhver node har en forløper som er en initial node.
(4) Et beslutningstre har kun en initial node, kalt treets **rot**.

Et spill er nå en valgt vei gjennom beslutningstreet, fra rota til en terminal node. (Merk at når vi tegner spilltreet lar vi rota være på toppen og de terminale nodene nederst.)

Høyden $h(\nu)$ til en node ν er det minimale antall kanter fram til en terminal node, mens **dybden** $d(\nu)$ er antallet kanter tilbake til spilltreets rot. **Lengden** $l(G)$ til et spill G er gitt ved høyden til rota ν_0, $l(G) = h(\nu_0)$. Generelt har vi for enhver node ν

$$l(G) \leq h(\nu) + d(\nu)$$

I figur 1 er $l(G) = 2$, det minste antall kanter fra roten til en terminal node. Spillets gang er bestemt av spillernes valg av strategi. En **ren strategi** for en spiller er en spesifisering av hvilket valg som skal gjøres i enhver node hvor det er opp til spilleren å gjøre et valg. Eksempelvis kan vi tenke oss at en pokerspiller alltid velger å satse i henhold til den matematiske sannsynlighet for at han har de beste kortene. Det vil være en ren strategi. Hvis en spiller veksler tilfeldig mellom strategier sier vi at spilleren følger en **blandet strategi**. Dette vil være tilfellet hvis pokerspilleren veksler mellom å holde seg til det korrekte, matematisk sett, og å bløffe, dvs. satse uten å ha dekning for det i kortene i håp om å knekke motspillerene.

I tillegg til å ha klarlagt hva hver spiller kan gjøre i hver enkelt av sine noder, må vi sette en verdi på hver terminal node, et **utbytte**. Dette er en smart måte å oversette begrepene vinne7tape til tall. Utbyttet kan f.eks. være -1 for tap, 0 for uavgjort og +1 for vinn. Ikke-terminale noder har også sin verdi som vi etterhvert skal se ligger i intervallet $[-1, 1]$.

Vi skal alltid anta at alle spillerne velger optimale strategier for å prøve å vinne. I tillegg antar vi at spillene våre er **nullsum-spill**, dvs. spill der summen av utbyttene i hver node er 0. Hvis en spiller har verdien +1 i en node (og altså hel sikkert vinner spillet, så vil den andre spilleren ha verdien -1 og helt sikkert tape. Vi skal ofte velge å la utbyttene ligge i intervallet $[0, 1]$, der 0 betegner tap og 1 betegner seier. I dette tilfellet vil summen av spillverdiene i et null-sum-spill være 1.

Spilleksempel 1; Forenklet Nim

To og to elever spiller sammen. De får utlevert en fyrstikkeske med fyrstikker. Fyrstikkene legges i en haug på bordet. Spillerne trekker annen hver gang. Spillerne kan trekke enten 1, 2 eller 3 fyrstikker. Den som tar den siste fyrstikken har vunnet. Det er lett å se at hvis det er 4 fyrstikker igjen har den som ikke er i trekket vunnet. Tilsvarende for 8, da er det umulig for nestemann ikke å legge forholdene til rette for at hans motstander kan fjerne fyrstikker slik at det blir 4 igjen. Fortsetter vi på samme måte ser vi det å etterlate seg et antall fyrstikker som er delelig med 4 er en sikker måte å vinne spillet.

La oss for enkelthet skyld anta at vi starter med 5 fyrstikker. Hver node gis navn etter hvor mange fyrstikker som er igjen. Spillets rot kalles dermed 5 og de terminale nodene gis alle navnet 0. Merk at vi ikke identifiserer noder med samme navn når de opptrer på forskjellige steder i spilltreet. En node kan dermed "huske" sin forhistorie, noe som i mange sammenhenger gjør systematiseringsarbeidet mye enklere.

$$
\begin{array}{cccccccc}
\mathbf{I} & & & 5 & & & & \\
 & & \swarrow & \downarrow & \searrow & & & \\
\mathbf{II} & 2 & & 3 & & 4 & & \\
 & & & & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\
\mathbf{I} & & & 1 & & 2 & & 3 \\
 & & & & & \downarrow & \searrow & \\
\mathbf{II} & & & & & 0 & & 1
\end{array}
$$

Figur 2. Utdrag av spilltre for forenklet Nim

Spiller **I** begynner og 5 er derfor en **I**-node. Noder av odde dybde er **II**-noder, de med jevn dybde er **I**-noder. Verdien i de terminale nodene er enten 1 eller -1, alt etter hvem som vinner. I figur 2 er de terminale nodene markert med 1, dvs 1 fyrstikk igjen. Da har vi selvfølgelig ikke lenger noen valgsituasjon og verdien i disse nodene er 1 på **I**-linjene og -1 på **II**-linjene. En strategi for spiller **I** er nå et valg blant alle etterfølgerne i enhver **I**-node. (Den nullen som er tatt med i nederste linje har egentlig ikke noe i treet å gjøre, all den stund **I** allerede er i en terminal node i forløperen. Grunnen til at den står der er for nettopp å markere at spiller **I** har muligheten til å avgjøre spillet til sin fordel i linja over.)

La y være en terminal node for et nullsum-spill G. Vi gir y en spillverdi $H_I(y)$ gitt som gevinsten i y for spiller **I**. Siden spillet er et nullsum-spill, vil gevinsten for spiller **II** være gitt ved $H_{II}(y) = -H_I(y)$. Definer nå en spillverdi for en vilkårlig node x ved:

$$H_I(x) = \begin{cases} \max_i H_I(\nu_i) & \text{hvis } x \text{ er en } \mathbf{I}\text{-node} \\ \min_i H_I(\nu_i) & \text{hvis } x \text{ er en } \mathbf{II}\text{-node} \end{cases}$$

der $\{\nu_j\}_{j \in J}$ er mengden av etterfølgere til x. Gjentar vi denne prosedyren slik at vi stadig reduserer lengden av undertreet vi studerer, vil vi tilslutt kunne beregne verdien til den initiale noden x_0. Dette tallet kaller vi **spill-verdien** til G. En konsekvens av konstruksjonen er at spiller **I** har en sikker vinnerstrategi hvis spillverdien til G er $H_I(x) = 1$, og tilsvarende for **II** hvis $H_I(x) = 0$. Hvis **I** har en vinnerstrategi betyr det at i enhver **I**-node så finnes en etterfølgende **II**-node med spillverdi 1. Spiller **I** velger selvfølgelig alltid en slik. På den annen side vil alle etterfølgere etter en **II**-node som inngår i en vinnerstrategi ha spillverdi 1. Spiller **II** må derfor velge en node hvor han helt sikkert taper.

Det vi her har beskrevet kalles Zermelos algoritme eller "baklengs induksjon", og gir oss en enkel oppskrift på hvordan vi kan beregne spillverdien til et spill og dermed si noe om utfallet av et spill der alle aktørene opptrer konsekvent etter målsettingen om å vinne spillet.

Spilleksempel 1; Forenklet Nim, fortsetter

Vi kan bruke Zermelos algoritme til å beregne spillverdien til forenklet Nim med 5 fyrstikker. Vi har gitt de terminale nodene verdien 1 eller -1 avhengig av om de er **I**-noder eller **II**-noder. I hver node bruker vi oppskriften over og vi "forflytter" på denne måten 1-ere og (-1)-ere oppover i spilltreet.

$$\begin{array}{cccccccc}
\mathbf{I} & & & 5_{+1} & & & & \\
 & & \swarrow & \downarrow & \searrow & & & \\
\mathbf{II} & 2_{-1} & & 3_{-1} & & 4_{+1} & & \\
 & & & & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\
\mathbf{I} & & & 1_{+1} & & 2_{+1} & & 3_{+1} \\
 & & & & & \downarrow & \searrow & \\
\mathbf{II} & & & & & {}_{-1} & & 1_{-1}
\end{array}$$

Figur 3. Samme som figur 2, men hver node er indeksert med spillverdien

De tre **II**-nodene 2,3 og 4 av dybde 1 har verdi -1, -1 og +1 og dermed får rota verdi +1. Dermed har spillet spillverdi +1, noe som betyr at spiller **I** har en sikker vinnerstrategi, slik den er beskrevet over. (Formelt sett skal en strategi også angi hva som skal gjøres i noder med $4n$ fyrstikker, også for spiller **I**, men det har ingen betydning for vinnerstrategiene og ethvert valg er like bra.)
Hvis spillverdien til et spill er 1 eller -1 sier vi at spillet har **vinnerstrategier**. Det betyr at det finnes en strategi for f.eks. spiller **I** som sikrer at hun vinner spillet. I praksis

betyr dette at i enhver **I**-node x, så finnes minst én etterfølger med verdi $+1$ og det finnes tilstrekkelig mange **II**-noder hvor alle etterfølgerne har verdi $+1$. Som vi har sett er forenklet Nim et slikt spill.

2. Sannsynlighetsteori

Vi skal se på noen begreper og resultater fra sannsynlighetsteori og som vi har bruk for. Anta at vi slår en terning. Det er 6 mulige utfall og vi kaller mengden

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

for **utfallsrommet**. Delmengder av Ω kalles for **utfallsmengder**, **utfall** eller **hendelser**. La $S = \mathcal{P}(\Omega)$ være mengden av alle utfallsmengder (mengden $\mathcal{P}(M)$ av alle delmengder av en mengde M kalles ofte potensmengden til M og vi har $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$. Notasjonen $|M|$ betyr antall elementer i mengden M). Et **sannsynlighetsmål** er en funksjon

$$P : \mathcal{P}(M) \longrightarrow [0, 1]$$

med egenskaper:
(i) $P(\emptyset) = 0; \qquad P(\Omega) = 1$
(ii) $P(F \cup G) = P(F) + P(G)$ når $F \cap G = \emptyset$ (disjunkte utfall).
Funksjonsverdien $P(F)$ tolkes som sannsynligheten av utfallsmengden F.

Vi sier at to hendelser er **stokastisk uavhengige** hvis den ene ikke er påvirket av den andre og motsatt. For uavhengige hendelser har vi formelen

$$P(F \cap G) = P(F)P(G)$$

F.eks. er det å slå kron og mynt to ganger etter hverandre og å få mynt i begge kast to uavhengige hendelser. Vi lar F være mynt i første kastet og G mynt i andre kastet. Utfallet $F \cap G$ er da mynt i begge kastene. Sannsynlighetene $P(F)$ for å få mynt i første kast og $P(G)$ for å få mynt i andre kast er begge $\frac{1}{2}$ og sannsynligheten for å få mynt i begge kastene er i henhold til formelen $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Eksempel A

Hva er sannsynligheten for å få minst én 6-er når vi slår to terninger etter hverandre?

Løsning. La $\mathcal{W}_1$ være utfallet 6-er i første kast og $\mathcal{W}_2$ tilsvarende i andre. La $\mathcal{L}_1$ og $\mathcal{L}_2$ være de motsatte hendelsene, dvs. henholdsvis $1, 2, 3, 4, 5$ i første kast og $1, 2, 3, 4, 5$ i andre kast. Vi skal beregne $P(\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2)$. Svaret blir ikke $P(\mathcal{W}_1) \cdot P(\mathcal{W}_2)$, nettopp fordi hendelsene ikke er uavhengige. Derimot har vi at $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ (6-er i begge kast), $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{L}_2$ (6-er i første kast, men ikke i andre) og $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{W}_2$ (6-er i andre kast, men ikke i første) er disjunkte hendelser og 6-er i minst ett kast er gitt som unionen av dem:

$$\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = (\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) \cup (\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{L}_2) \cup (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{W}_2)$$

som ved å bruke produktformelen og egenskap (ii) gir

$$\begin{aligned} P(\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2) &= P(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) + P(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{L}_2) + P(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{W}_2) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{11}{36} \end{aligned}$$

Sannsynligheten for å få minst én 6-er i to kast er altså $\frac{11}{36}$. Vi kunne også ha beregnet dette ved å se på $1 - P(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2)$, dvs. komplementet til å ikke få 6 i noen av kastene. Vi har

$$1 - P(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) = 1 - P(\mathcal{L}_1) \cdot P(\mathcal{L}_2) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{11}{36}$$

Hva så med $P(F \cap G)$ hvis hendelsene ikke er uavhengige? For å løse problemet innfører vi begrepet **betinget sannsynlighet**. Vi skriver $P(G|F)$ som betyr sannsynligheten for at G inntreffer når vi vet at F inntreffer. Det gir oss, nesten pr. definisjon formelen

$$P(F \cap G) = P(F) \cdot P(G|F)$$

Denne er selvfølgelig symmetrisk i F og G og vi får **Bayes regel**:

$$P(F) \cdot P(G|F) = P(G) \cdot P(F|G)$$

Eksempel B

Hva er sannsynligheten for å få minst en 6-er og at summen av terningene blir 9 når vi slår to terninger etter hverandre ?

Løsning. La F: Vi slår minst én 6-er og G: Summen av terningene er 9. Det er lett å se at av 36 mulige utfall, så er det 4 som gir sum 9

$$6 + 3, 5 + 4, 4 + 5, 3 + 6$$

og $P(G) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. To av disse inneholder en 6-er så sannsynligheten for at vi slår minst én 6-er når vi vet at summen er 9 blir $P(F|G) = \frac{1}{2}$. Dermed får vi at sannsynligheten for å slå minst en 6-er *og* at summen blir 9 blir

$$P(F \cap G) = P(F|G) \cdot P(G) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$$

nemlig de to hendelsene 6+3 og 3+6.

Eksempel C

Følgende oppgave er gitt: En boks inneholder en gull- og to sølvmynter. To mynter er trukket tilfeldig fra boksen. En medhjelper ser på myntene som er trukket ut uten at du får se. Han velger en av myntene og viser den til deg. Den er av sølv. Til hvilken odds ville du satse med medhjelperen at den andre er av gull? Til hvilken odds ville du satse hvis den mynten du ser er valgt tilfeldig fra det uttrukne paret?

Løsning. La F være hendelsen: Gullmynten er blant de to først uttrukne myntene, og G: Medhjelperen trekker ut en sølvmynt. Vi er ute etter $P(F \cap G)$, dvs. sannsynligheten for at den andre av de to myntene er av gull. (Hvis vi først trekker ut en sølv- og en gullmynt, og deretter trekker ut sølvmynten, vil den gjenværende være av gull.) Vi deler opp i de to situasjonene i teksten. Dersom medhjelperen helt sikkert velger ut en sølvmynt, (noe han alltid kan gjøre), så er de to hendelsene uavhengige og $P(G) = 1$. Det gir oss

$$P(F \cap G) = P(F) \cdot P(G) = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

Merk at komplementet til F er at den ene mynten vi velger å legge igjen er av gull. Sannsynligheten for det er $\frac{1}{3}$ og $P(F) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Det vil altså stå seg å satse inntil 2 til 3, dvs. at du satser 2 og hvis du vinner får du 3 tilbake.

I det andre tilfellet vil hendelsene F og G ikke være uavhengige, og vi må bruke betinget sannsynlighet. Det er nokså opplagt at $P(G|F) = \frac{1}{2}$. Dersom gullmynten var blant de to først uttrukne, så hadde medhjelperen én gull- og én sølvmynt å velge mellom. Et tilfeldig valg gir $\frac{1}{2}$ sannsynlighet for gullmynt. Det gir oss dermed

$$P(F \cap G) = P(F) \cdot P(G|F) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

og vi bør ikke satse mer enn 1 til 3.
La oss til slutt i dette kapittelet ta opp tråden fra kapittel 1 og se litt mer på spillverdier. La $x \in G$ være en node i et spill G, en node hvor det ikke er opp til noen av spillerne å velge strategi, men derimot et lotteri. I praksis betyr det at en av spillerne skal slå en terning, kaste en mynt eller liknende. La $y_1, \ldots, y_r$ betegne nodene som følger etter x. Vi kan f.eks. tenke oss at terningkast 1 bringer oss til node y_1, terningkast 2 til node y_2, osv. Hvis det var spiller **I** som slo terningen vil alle y-nodene være **I**-noder. Her må **I** gjøre et valg av strategi. Hvis spillet var ludo vil et typisk strategivalg være å bestemme seg for hvilken brikke som skal flyttes. Anta nå at vi har funnet en spillverdi i hver av nodene y_i, for spiller **I** gitt ved $H_I(y_i)$. Da kan vi beregne spillverdien i noden x ved følgende formel

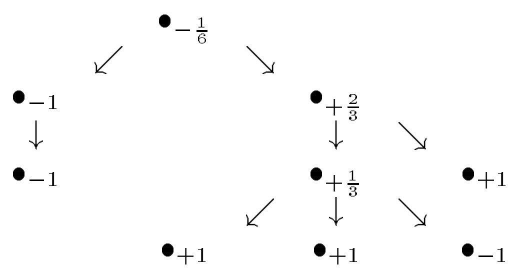
$$H_I(x) = \sum_i P(y_i) H_I(y_i)$$

hvor $P(y_i)$ er sannsynligheten for å havne i node y_i. Vi beregner altså det veide gjennomsnitt av spillverdiene i alle etterfø)lgende noder. Ved å veksle mellom denne algoritmen og algoritmen

$$H_I(x) = \begin{cases} \max_i H_I(\nu_i) & \text{hvis } x \text{ er en } \mathbf{I}\text{-node} \\ \min_i H_I(\nu_i) & \text{hvis } x \text{ er en } \mathbf{II}\text{-node} \end{cases}$$

beskrevet i forrige kapittel kan vi beregne spillverdien til spillet G, gitt som spillverdien til roten til spillet G.

Vi kan se på et rent regneeksempel uten å beskrive noe spill. Gitt et spilltre som i figur 4 under. Vi antar at alle etterfølgere i enhver node er like sannsynlige, dvs at ingen av spillerne tenker, men bare velger tilfeldig mellom de mulighetene de har. De terminale nodene er gitt tilfeldige verdier.



Figur 4. Eksempel på et spilltre med spillverdier

Spillverdien, eller verdien til rota, er som vi ser $-\frac{1}{6}$, dvs. at det er litt større sannsynlighet for at spiller **II** vinner enn at spiller **I** vinner.

En funksjon som til ethvert utfall gir oss en verdi (et reelt tall) $X : \Omega \to \mathbf{R}$ kalles en **stokastisk variabel**. Funksjonen kan f.eks. være 5 for mynt og -4 for kron. Variablen gir oss en gitt verdi for hver hendelse. Vi kan beregne **forventningsverdien** til en (diskret) stokastisk variabel X, betegnet EX, ved formelen

$$EX = \sum kP(X = k)$$

hvor vi summerer over alle verdier av k der $P(X = k) \neq 0$. Hvis vi beregner gjennomsnittsverdien til X i mange uavhengige hendelser, vil "de store talls lov" presis gi oss forventningsverdien.
I eksemplet over vil forventningsverdien bli

$$EX = 5 \cdot \frac{1}{2} + (-4) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

hvilket betyr at i det lange løp ville vi tjene på å inngå en avtale der vi vant 5 kroner for hver mynt og tapte 4 for hver kron. For øvrig ingen overraskelse!

En stokastisk variabel $X : \Omega \to \mathbf{R}$ er i spillteorien et lotteri og verdiene $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, kalles **gevinst** eller **utbytte**. Forventet utbytte av et lotteri er dermed gitt som summen av alle mulige utbytter multiplisert med sannsynligheten for akkurat det utbyttet.

Eksempel D

Det finnes en (kanskje) velkjent variant av Eksempel C. På enkelte TV-stasjoner har følgende konsept vært brukt i underholdningsøyemed. En publikummer (spilleren) skal velge blant tre lukkede luker (eller dører eller kister). Bak to av lukene er det en banan og bak den tredje noe adskillig mer verdifullt. Spilleren vet ikke hva som er hvor og velger på måfå. I steden for å åpne den valgte luka sier programlederen at han skal gi spilleren litt hjelp og åpner en av de gjenværende lukene. Programlederen vet hvor bananene er og velger alltid en slik. Dermed er det to uåpnede luker igjen og spilleren får valget mellom å holde på sitt valg eller bytte. Av (u-)kjente grunner velger de aller fleste å stå på sitt valg. (Sannsynligvis oppfatter man det som hipp som happ hvilken man velger og da er det tryggest å stå ved det opprinnelige valget) Programlederen åpner den valgte luken og spenningen utløses. Skulle spilleren ha byttet?

Løsning. Spilleren skulle ha byttet. Hvis vi setter verdien på utbyttet til $U = 1$ for den verdifulle gevinsten og $U = 0$ for bananen kan vi beregne forventet utbytte i de to tilfellene, at spilleren bytter eller at han ikke bytter. Vi antar først at han ikke bytter. Det er uansett to muligheter for innledende valg. F: Luka skjuler en banan og G: luka skjuler toppgevinsten. Ved et tilfeldig valg har vi $P(F) = \frac{2}{3}$ og $P(G) = \frac{1}{3}$, siden det er 2 bananer. Det gir forventet utbytte

$$E_{\text{ikke bytte}} = U_F \cdot P(F) + U_G \cdot P(G) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Hvis vi bytter blir det motsatt

$$E_{\text{bytte}} = U_F \cdot P(G) + U_G \cdot P(F) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

fordi at hvis spilleren bommet til å begynne med og programlederen har avdekket den andre bananen, så inneholder den andre luka som er igjen helt sikkert toppgevinsten. Mao. hvis spilleren bytter dobles sjansen for vinne toppgevinsten.

Spilleksempel 2; Duell

Dette eksemplet er relativt voldelig i sin natur, men vi er selvfølgelig kun interessert i sannsynlighetsbetraktninger og vi ser helt bort fra de moralske sidene ved spillet.

To duellanter går mot hverandre. Hver av dem er bevæpnet med en pistol ladd med kun en kule. Sannsynligheten for å treffe motstanderen øker jo nærmere de kommer hverandre. Det avgjørende spørsmålet blir når man skal fyre av. Skyter man for tidlig og bommer, kan motsatnderen komme helt innpå før han skyter. Skyter man for seint øker sannsynligheten for at man allerede er truffet av motstanderens kule.

La D være startavstanden mellom duellantene. For en gitt avstand $0 \leq d \leq D$ er sannsynligheten for at **I** (henholdsvis **II**) treffer gitt ved $P_{\mathbf{I}}(d)$ (henholdsvis $P_{\mathbf{II}}(d)$). For begge aktørene er det selvfølgelig optimalt å skyte i det øyeblikk det å skyte framfor å la være gir en optimal sannsynlighet for å overleve. For spiller **I** er sannsynligheten for å overleve hvis han skyter gitt ved $P_{\mathbf{I}}(d)$. Sannsynligheten for å overleve hvis han lar være er maksimalt $1 - P_{\mathbf{II}}(d)$ (fordi det kunne være at **II** umiddelbart fyrte av). Han bør altså skyte dersom

$$P_{\mathbf{I}}(d) \geq 1 - P_{\mathbf{II}}(d)$$

eller

$$P_{\mathbf{I}}(d) + P_{\mathbf{II}}(d) \geq 1$$

Vi får nøyaktig samme betingelse for spiller **II** hvilket betyr at begge to fyrer av når avstanden er slik at

$$P_{\mathbf{I}}(d) + P_{\mathbf{II}}(d) = 1$$

dvs. nøyaktig samtidig, uavhengig av om de er gode eller dårlige skyttere. Dette eksempelet har mange anvendelser. En fotballspiller som kommer alene mot keeper. Når skal han finte og når skal keeper gjøre sitt utfall?

3. Spill der utfallet er avhengig av hva motstanderen gjør

Vi skal se på det spesielle tilfellet der vi har to aktører og hver aktør har to forskjellige strategier. Dette er en generell setting som vil dekke flere av våre klassiske eksempler, slik som Fangenes dilemma, Chickenplay og Poker. Dette kapitlet kan kanskje oppfattes som teknisk komplisert. Fortvil ikke, det er mulig å hoppe over det og gå rett på kapittel 4.

I et to-spiller-spill med to strategier for hver spiller har våre to spillere hver sin utbytte-matrise, vi skriver dem

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

hvor **A** er utbytte-matrisen for spiller **I**, og **B** er utbytte-matrisen for spiller **II**. Blandede strategier for de to spillerene er entydig bestemt av sannsynlighetene x og y for at spillerne velger sin første rene strategi (og derfor sannsynlighet $1-x$ og $1-y$ for den andre rene strategien). Utbyttet for de to spillerne er dermed gitt ved

$$\begin{aligned} H_1(x,y) &= X\mathbf{A}Y^T \\ &= (x \; 1-x)\mathbf{A}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} \\ &= (a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})xy + (a_{12}-a_{22})x + (a_{21}-a_{22})y + a_{22} \end{aligned}$$

for spiller **I**, og

$$\begin{aligned} H_2(x,y) &= X\mathbf{B}Y^T \\ &= (x \; 1-x)\mathbf{B}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} \\ &= (b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22})xy + (b_{12}-b_{22})x + (b_{21}-b_{22})y + b_{22} \end{aligned}$$

for spiller **II**. Siden sannsynlighetene x og y oppfyller $0 \le x, y \le 1$ får vi at utbytte-funksjonene blir funksjoner på enhetskvadratet, og vi skal forsøke å finne likevektspunk-tene.
Vi skal først finne de tillatte situasjonene for spiller **I**. Siden H_1 er lineær i hver variabel er en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at (x,y) er et likevektspunkt at

$$H_1(1,y) = (\,1 \quad 0\,)\,\mathbf{A}Y^T \le H_1(x,y)$$

$$H_1(0,y) = (\,0 \quad 1\,)\,\mathbf{A}Y^T \le H_1(x,y)$$

og tilsvarende for andre koordinaten. Hvis vi setter

$$a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22} = A, \quad a_{22}-a_{12} = a$$

får vi likningene

$$A(1-x)y - a(1-x) = (Ay-a)(1-x) \le 0$$

$$Axy - ax = (Ay - a)x \geq 0$$

og de tillatte situasjonene for spiller **I** er løsningene til disse to ulikhetene innenfor enhets-kvadratet $[0,1] \times [0,1]$. Ved å splitte opp mulighetene og å sette $\alpha = \frac{a}{A}$ får vi følgende løsning, når vi antar at $A > 0$:

$$x = 0 \quad \text{gir} \quad y \leq \alpha$$

$$x = 1 \quad \text{gir} \quad y \geq \alpha$$

$$0 < x < 1 \quad \text{gir} \quad y = \alpha$$

Hvis $A < 0$ får vi de motsatte ulikhetene.
Hvis $A = 0$ får vi ulikhetene

$$-a(1-x) \leq 0, \qquad -ax \geq 0$$

Dette gir oss løsning

$$x = 0,\ y \,\text{fritt valgt for}\, a \geq 0$$

$$x = 1,\ y \,\text{fritt valgt for}\, a \leq 0$$

$$x, y \,\text{fritt valgt for}\, a = 0$$

Det siste tilfellet betyr at alle situasjoner er tillatte.

Tilsvarende gjør vi for spiller **II**. Vi setter

$$b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = B, \quad b_{22} - b_{21} = b$$

og vi får nøyaktig samme løsning med den forskjell at vi bytter om x og y og erstatter α med $\beta = \frac{b}{B}$. Dermed har vi to grafer i x,y-planet som beskriver de tillatte situasjoner for de to spillerene. Likevektsituasjoner finner vi i skjæringspunktene mellom de to grafene,dvs.

Figur 5. $A > 0,\ B < 0$

Vi skal se på noen kjente eksempler på den type spill vi her har beskrevet.

Spilleksempel 3a; Fangenes dilemma

Vi antar at spillerene er to kriminelle som er arrestert og skal avhøres hver for seg. Det er ingen bevis mot dem, og dom og straffeutmåling avhenger direkte av eventuelle tilståelser. Hvis begge tilstår vil begge få 8 år fengsel. Hvis ingen tilstår slipper de med 1 år. Hvis en tilstår og den andre tier, sier loven i dette landet at den som tilstår går fri, mens den andre får 10 år. Dette gir utbytte-matriser

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Her har vi $A = 1$ (og derfor større enn 0), $a = -1$ og dermed $\alpha = -1$. Tilsvarende for spiller **B**. Tillatte strategier for spiller **A** er på formen $(1, y)$ og for spiller **B** på formen $(x, 1)$. Eneste likevektspunkt blir da $(1, 1)$, som betyr at begge tilstår.

Spilleksempel 3b; Almenningens tragedie

I dette spillet antar vi at to bønder deler en almenning, i tillegg til at de har sin egen personlige jord. På almenningen er det lite, men veldig næringsrikt gress. Hvis gresset blir spist helt ned et år, tar det flere år før det er tilbake. Dette vil skje hvis begge bøndene slipper dyra sine ut på almenningen. Hvis bare en av dem gjør det, blir ikke tråkket så stort, og almenningen vil være like fruktbar allerede året etter. Dette gir oss ved passende valg av utbytte-koeffisienter,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 1,5 & 1,1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1,2 \\ 0,8 & 1,1 \end{pmatrix}$$

som gir $A = 0,1$, $a = 0,3$ og $\alpha = \frac{1}{3}$. Tilsvarende får vi for spiller **II**. Likevektspunktet blir $x = y = \frac{1}{3}$, mao. hver bonde velger med sannsynlighet $\frac{1}{3}$ å ikke bruke almenningen.

En aktuell variant av dette spillet er de internasjonale klimaforhandlingene. Her er det like mange spillere som det er land i verden. Alle har et visst utslipp av CO_2, og de som vil bli rikere må slippe ut mer. Atmosfæren tåler imidlertid ikke at alle øker sine utslipp. Når norske myndigheter sier at en liten økning hos oss gir en enda mindre relativ økning på verdensbasis er for så vidt dette riktig. Men dette er et valg av strategi for å øke utbyttet og det er ingen grunn til å tro at ikke de andre landene følger samme strategi. Dermed bærer det ut i uføret. Om man da ikke kommer fram til en internasjonal klimaavtale. I såfall er det et kooporativt spill og det blir ikke behandlet her.

Spilleksempel 3c; Poker

Et at verdens mest berømte spill er kortspillet Poker. For ikke å gjøre tingene mer komplisert enn de trenger å være, skal vi foreta noen forenklinger. Imidlertid skal vi bevare essensen i spillet.

Poker spilles normalt av flere spillere, men vår første forenkling er å anta at vi bare har to deltakere. Siden den ene vinner det den andre taper er Poker et null-sum-spill.

Pokerspill begynner alltid med at hver spiller får utdelt 5 kort. Antallet mulige kombinasjoner, eller hender som de kalles i Poker, er 2 598 960. Ett hovedpoeng ved Poker er at mengden av hender er lineært ordnet, dvs gitt to forskjellige, så er alltid den ene bedre enn den andre eller motsatt. Det betyr at vi ved å få utdelt en hånd egentlig trekker et tall mellom 1 og 2 598 960. Vi kaller denne tallmengden $\mathcal{S}$. Poker går dermed ut på at spiller i trekker et tall $s_i \in \mathcal{S}$ og den vinner som har det høyeste tallet. Imidlertid er det flere vesentlige momenter i Poker. Det inngår også kjøpslåing med penger. Etter at kortene er utdelt, dvs. tallene er trukket begynner spillerne å by. Første spiller åpner og deretter kan de andre gjøre en av tre ting. De kan by over og spillet går videre til nestemann, de kan "se", dvs at budet er akseptert og begge legger fram sine kort. Beste kort vinner potten. Eller de kan kaste seg. Da taper de de pengene de allerede har lagt i potten og får ikke delta videre. Den mest opplagte strategien i dette spillet ville være å by høyt ved gode kort og lavt ved dårlige kort. Hvis alle spillerne var like gode i kombinatorikk og sannsynlighetsregning, ville pengene dermed bare skifte eiere avhengig av utdelte kort, dvs. tilfeldig valgt tall. I det lange løp ville alle sitte igjen med det de startet med.

Det som gjør Poker fascinerende er selvfølgelig innføringen av en ny strategi, nemlig "bløffing". Bløffing er å gjøre det motsatte av det som er beskrevet over. Ved dårlige kort byr spilleren høyt, for å få motstanderen til å tro at han har gode kort og derved kaste kortene. Den bløffende spilleren ville dermed vinne potten uten nødvendigvis å ha de beste kortene. Tilsvarende kan man by lavt på gode kort, for å gi motstanderen inntrykk av at man har dårlige kort og dermed få motstanderen til å by høyt for så å se og å vinne potten fordi egen hånd er bedre enn motstanderens. En god spiller blander selvfølgelig disse to strategiene på en slik måte at det er uforutsigbart for motstanderen å vite hvilken strategi som brukes. I Von Neumann og Morgensterns klassiske bok "Theory of Games and Economical behavior"er denne forenklede form for Poker beskrevet i detalj, og vi henviser til denne for et dypere studium.

Spilleksempel 3d; Chickenplay:

To unge gutter skal vise ei jente hvem som er tøffest. De kjører rett mot hverandre med bil. Den som svinger unna er "chicken"og vinner (i dette spillet) ingen jentes gunst. Ved å gjøre ulike valg for koeffisienter i utbytte-matrisen vil det opptre ulike likevektssituasjoner. Vi skal ikke gå i detalj her, men overlater det til leseren å gjøre både vurderingene og utregningene.

Spilleksempel 3e; Tokortsspill med to strategier:

Vi kan implementere disse variasjonene over Fangenes dilemma som spill vi kan spille. Hver spiller har to kort, A og B. Uten å informere motspilleren velger begge to ett av kortene. Deretter offentliggjør begge spillerene sine valg samtidig. Poenggivingen kan være som følger

Valg		Poeng	
I	**II**	**I**	**II**
A	A	1	0
A	B	0	1
B	A	0	1
B	B	1	0

Figur 6.

Likevektspunktet er i dette tilfellet gitt ved $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, dvs. at vi veksler mellom kort A og B med lik sannsynlighet for hver av dem. Men, pass på, her er det mulig å vinne ved å bruke psykologisk innsikt.

4. Andre eksempler på spill

I dette kapitlet skal vi se på en del eksempler på ulike spill. Noen av dem er velkjente fra dagliglivet mens andre er mindre kjent. Grunnen kan kanskje være at de er laget for anledningen. De spillene vi beskriver her skal oppfylle tre kriterier:

1. De skal være lette å lære seg og enkle å spille,
2. De må være morsomme for elevene å spille,
3. De må bære i seg et matematisk innhold som elevene kan forstå.

Et viktig poeng i denne sammenheng er at de spillene vi refererer til kun er eksempler. Enhver lærer kan med fordel lage sine egne spill, enten på egen hånd eller sammen med sine elever.

Spilleksempel 4; Nim med to bunker

To og to elever spiller sammen med fyrstikker. Fyrstikkene fordeles på to bunker med vilkårlig antall fyrstikker i begge bunkene. Spillerne trekker annen hver gang og de kan trekke så mange fyrstikker de vil, men bare fra én bunke. Den vinner som trekker den siste fyrstikken.

Beskrivelse av vinnerstrategi. Dette er et rent strategispill med full åpenhet. Det er ikke mulighet for uavgjort, dvs det finnes vinnerstrategier for en av spillerne. En generell vinnerstilling vil være to bunker med like mange fyrstikker. Strategien er da å gjøre det samme som motspilleren. Dermed kan man uansett motstanderens trekk opprettholde vinnerstillingen. Til slutt vil motspilleren være tvunget til å ta resten av den ene bunken og han har tapt spillet.

Spilleksempel 5; Nim med flere bunker

To og to spiller sammen med fyrstikker. Fyrstikkene fordeles på et passende antall bunker med et vilkårlig antall fyrstikker i hver. Spillerne trekker annen hver gang og de kan trekke så mange fyrstikker de vil, men kun fra én bunke. Den som tar den siste fyrstikken vinner spillet.

Beskrivelse av vinnerstrategi. Nok en gang et rent strategispill med full åpenhet, men med en vanskeligere tilgjengelig algoritme for å vinne. Men her kommer beskrivelsen: Gjør om antall fyrstikker i hver bunke til totallsystemet. Summer modulo 2 de forskjellige antallene som om tallene skulle være vektorer, (1-ere,2-ere,4-ere,8-ere, osv). Hvis summen blir null-vektoren har vi en vinnerstilling. I praksis kommer vi oss inn i en vinnerstilling på følgende måte. Tell opp hver bunke i totallsystemet og legg sammen som vektorer modulo to. Hvis vi ikke er i en vinnerstilling får vi et svar, helt sikkert forskjellig fra null. Gjør om dette svaret fra vektor til tall og fjern et passende antall fyrstikker fra en av bunkene. Eksempel: Tre bunker med 8, 5 og 3 er ingen vinnerstilling. I totallsystemet skrives disse tre tallene som 1000, 101 og 11. Summen blir 1112 som ikke kun består av partall. Fjerner vi derimot 2 fra den største bunken blir antallene 6 (110), 5 (101) og 3 (11). Tilsammen 222 og vi har en vinnerstilling. Uansett hva motstanderen gjør nå vil det dukke opp et oddetall i summen. La oss f.eks. anta at motstanderen tar 2 fra den største bunken. De tre tallene blir da 4 (100), 5 (101) og 3 (11), som gir sum 212. Fjerner vi 2 fra den minste bunken blir summen 202, som er en ny vinnerstilling.

I begge disse eksemplene finnes entydige vinnerstrategier. Det betyr at spillene er likeveltsspill, spill der det finnes likevektstilstander. Likevektstilstanden er presis vinnerstrategien. Ethvert annet valg for spiller **I** gir lavere (eller lik) forventet utbytte, mens for spiller **II** så vil alle valg gi samme utbytte, dvs alle valg gir mindre eller likt utbybtte og vi ser at dette passer med definisjonen av likevekt.

Spilleksempel 6; Sjakk

To og to spiller sammen. Spillet foregår på et brett med 16 brikker. Brikkene ...

Beskrivelse av vinnerstrategi. Selv om dette er et rent strategispill med full åpenhet, og det derfor finnes et fullstendig spilltre, er det ikke like lett å beskrive eventuelle vinnerstrategier. Hvis vi kunne gjøre det ville alle terminale noder ha verdi -1, 0 eller +1. Det samme ville være tilfelle (i henhold til Zermelos algoritme) for rota, dvs. spillverdien. Så vidt vites er denne spillverdien foreløpig ukjent.

Spilleksempel 7; Førstemann til 100

To spillere spiller mot hverandre. Førstemann slår terningen og legger sammen øyne. Hun kan holde på så lenge hun vil, men får hun 1 taper hun alle poengene i denne runden og turen går over til andremann. Hun kan også bestemme seg for å stoppe. Da beholder hun poengene sine (fra denne runden) og legger dem til det hun har opparbeidet fra tidligere runder. Førstemann til 100 (eller en annen verdi man blir enige om) vinner.

Beskrivelse av en optimal strategi. Det er mulig å regne ut en optimal strategi for å få flest mulig poeng i en runde. Anta at vi har N poeng. Spørsmålet er om vi skal stoppe eller slå en gang til. Slår vi 1 (sannsynlighet $\frac{1}{6}$) får vi 0 poeng, slår vi $n = 2, 3, 4, 5, 6$ (sannsynlighet $\frac{1}{6}$ for hvert tall) får vi $N + n$ poeng. Forventet poengsum etter neste kast blir da

$$\frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot (N + 2) + \ldots + \frac{1}{6} \cdot (N + 6) = \frac{1}{6} \cdot (5N + 20)$$

Betingelsen for at det lønner seg å fortsette å slå er at

$$\frac{1}{6} \cdot (5N + 20) \geq N$$

dvs. $N \leq 20$. Det betyr at har vi færre enn 20 poeng skal vi fortsette, har vi flere skal vi stoppe og for $N = 20$ spiller det ingen rolle. I spillets gang holder ikke dette resonnementet, vi må også forholde oss til motspillerens poengsum. Generelt bør vi slå litt mer hvis vi ligger under og litt mindre hvis vi ligger over. Regningene blir fort nokså komplisert og vi skal ikke gå i detalj. Dette er et kombinert lotteri/strategispill med full åpenhet.

Spilleksempel 8; Børs

To spillere spiller mot hverandre. Spillebrettet består av tre ruter på rad og med et hjemmeområde i hver ende. Hver spiller starter med 1000 (fiktive) kroner og en brikke plasseres i den midterste ruta. Spillet begynner med at hver spiller satser av sin beholdning. Beløpet skrives opp på en lapp (uten at motspilleren ser det). Deretter offentliggjøres innsatsene. Den som har høyest verdi vinner denne runden og flytter brikken ett hakk nærmere seg. I neste runde sitter hver spiller på 1000 kroner minus det de satset i første runde. Det satses på samme måte en gang til. Nok en gang kan den som har høyeste bud flytte brikken ett hakk i sin retning. Den har vunnet som først klarer å få brikken inn på sitt hjemmområde.

Børs er et rent strategispill, og helt lukket. Det er mulig å bruke avansert spillteori til å beregne likevektsituasjoner for spillet. Vi skal ikke komme inn på det her.

Spilleksempel 9; Primo

"Primo" er et enkelt, men veldig instruktivt terningsspill. To spillere slår med en terning og førstemann som får 5 eller 6 vinner. Dette er et rent lotteri og vi kan regne ut spillverdien. Ved å slå sammen en del av tallene får vi to muligheter for spiller **I**, vinne ved å slå 5 eller 6, dvs. spillverdi 1 med $\frac{1}{3}$ sannsynlighet, eller at spillet går videre med $\frac{2}{3}$ sannsynlighet (1,2,3 eller 4). Spiller **II** har nå $\frac{1}{3}$ sannsynlighet for å vinne, og med $\frac{2}{3}$ sannsynlighet for at **I** ikke har vunnet allerede i første runde, er sannsynligheten for at spiller **II** vinner $\frac{2}{9}$. Da har vi brukt opp $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$ og det er $\frac{4}{9}$ sannsynlighet for at **I** får slå igjen. Spiller **I** har $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$ sannsynlighet for å vinne i denne runden, osv. Fortsetter vi regningene ser vi at spiller **I** har

$$G = \frac{1}{3} + \frac{4}{27} + \frac{16}{243} + \dots$$

og spiller **II** har

$$\frac{2}{9} + \frac{8}{81} + \dots = \frac{2}{3}G$$

sannsynlighet for å vinne. Tilsammen har vi at $G + \frac{2}{3}G = 1$, dvs. $G = \frac{3}{5} = 0,6$ som betyr at sannsynligheten for å vinne er 60-40 i spiller **I** sin favør. Urettferdig kaller barn dette.

$$\begin{array}{cccl}
\bullet_G & & & G = \frac{2}{3}H + \frac{1}{3}1 \\
\downarrow & \searrow & & \\
\bullet_1 & & \bullet_H & H = \frac{2}{3}G + \frac{1}{3}0 \\
 & \swarrow & \downarrow & \\
\bullet_G & & \bullet_0 &
\end{array}$$

Figur 7. Utdrag av spilltre for Primo, spillverdier påført som indekser

Figur 7 viser en noe annerledes måte å beregne spillverdien. Vi lar nå spillverdiene variere i intervallet $[0, 1]$. Det betyr at den ene spilleren vinner på verdien 1, mens den andre vinner på 0. Spillverdi $\frac{1}{2}$ skulle bety at de har like stor sjanse for å vinne.

Figuren tar utgangspunkt i at hvis begge spillerne har slått en gang og ingen har oppnådd 5 eller 6, så starter egentlig spillet på nytt og må da ha samme spillverdi. Dermed blir oppgaven å løse likningen

$$\begin{aligned} G &= \frac{2}{3}(\frac{2}{3}G + \frac{1}{3}0) + \frac{1}{3}1 \\ &= \frac{4}{9}G + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

dvs. $G = \frac{3}{5}$ som er det samme som vi fikk over.

Vi kan bøte på urettferdigheten i dette spillet ved å endre på reglene og spille "modifisert Primo". Reglene er som i Primo, bortsett fra at spiller **II** vinner på 4,5 og 6 (og ikke bare 5 og 6). Spiller **I** har fordelen av å begynne, mens spiller **II** har flere muligheter til å vinne. Som over, så holder det å se på spilltreet for første runde, siden spillet repeterer seg selv videre dersom ingen vinner i denne runden. Spilltreet ser ut som antydet i figur 8, men merk at vi nå er tilbake til verdi +1 for seier og -1 for tap. Verdien i roten og i den ene (kvasi-)terminale noden begge er G. Dette gir $G = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3}(\frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot G)$ eller $6G = 2 - 2 + 2G$ hvilket betyr at $G = 0$ og de to spillerene har samme sannsynlighet for å vinne.

$$
\begin{tikzcd}
\bullet_G \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
\bullet_1 & & \bullet_H \arrow[dll] \arrow[d] \\
\bullet_G & & \bullet_{-1}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{aligned}
G &= \tfrac{2}{3}H + \tfrac{1}{3}1 \\
H &= \tfrac{1}{2}G + \tfrac{1}{2}(-1)
\end{aligned}
$$

Figur 8. Utdrag av spilltre for rettferdigfisert Primo, spillverdier påført som indekser

En annen visuell måte å framstille dette er som en tabell med 6 ganger 6 ruter, som vist i figur 9. Rute (m, n) tilsvarer at spiller **I** slår m i første kast og spiller **II** følger opp med en n. (Vi lar **II** slå selv om **I** har vunnet i første kast, dette betyr ingenting for utregningene). De to nederste radene, med ialt 12 ruter, svarer til at spiller **I** vinner i første kast, mens de 4×3 rutene i øverste høyre hjørne reflekterer at **II** har vunnet. De gjenstående 12 rutene svarer til at spillet gå videre (og vi er nøyaktig like langt). Like mange vinnerruter til hver spiller betyr at sannsynligheten for å vinne fordeler seg 50-50.

	1	2	3	4	5	6
1				**II**	**II**	**II**
2				**II**	**II**	**II**
3				**II**	**II**	**II**
4				**II**	**II**	**II**
5	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**
6	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**

Figur 9.

Tilsvarende kunne vi gjort for Primo, da ville vi fått følgende tabell:

	1	2	3	4	5	6
1					**II**	**II**
2					**II**	**II**
3					**II**	**II**
4					**II**	**II**
5	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**
6	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**

Figur 10.

Det er lett å se at fordelingen bli 12-8, dvs 60-40 i prosent.

Et interessant spørsmål er hva som skjer hvis det er 3 spillere, hvorav førstemann vinner på 5 og 6, andremann vinner på 4,5,6. Hva er vinnertallene til tredjemann hvis vinnersjansene skal være helt jevnt fordelt? Vel, førstemann har i sitt første kast $\frac{1}{3}$ sjanse til å vinne, andre mann tilsvarende $(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2})$ og da må tredjemann i rettferdighetens navn også få det. For å få til det må hun vinne uansett, $(\frac{1}{3} \cdot p = \frac{1}{3}$ gir $p = 1)$, altså på tallene 1,2,3,4,5,6.

Spilleksempel 10; Lotto

Et spill med stor oppmerksomhet er pengespillet Lotto. Man skulle kanskje tro at dette er et rent lotteri, men det er ikke riktig.

Som et spill mellom mange spillere foregår Lotto ved at hver spiller bestemmer seg for en av et gitt antall mulige tallkombinasjoner (i den norske varianten av spillet ca. 5 millioner) og putter et visst pengebeløp (for tiden kr. 3) i potten. Det telles opp hvor mange som har hver tallkombinasjon (eller deler av dem, for de mindre gevinstene). En tallkombinasjon trekkes ut og så fordeler de som har tippet denne kombinasjonen hele potten mellom seg. I det statlige norske lotto-spillet er hver kombinasjon hver uke spilt av 0 til ca. 3000 tippere, med et gjennomsnitt på 4. Dette gir store variasjoner i toppgevinsten.

Det er lukketheten av spillet som gir disse variasjonene. Hvis alle hadde visst hva de andre tippet ville det ha påvirket våre valg. Variasjonene over dette spillet vil vise det. I en klasse kan vi spille en forenklet variant. Alle elevene satser (fiktivt) 1 krone på et tall fra 1 til 6. En terning avgjør hvilket tall som vinner. Dermed får vi en situasjon hvor de andre valg av strategier (mao. av tall) påvirker egen forventet gevinst i spillet.

Vi kan variere dette spillet. Reglene er som tidligere, men vi åpner for ulike måter å trekke vinnertallet. Tre varianter kan være

1) Helt tilfeldig
2) Tendenstrekning, dvs de forskjellige tallene veies i henhold til hvor mye de er spilt.
3) Majoritetsvalg, det mestspilte tallet trekkes.

En skjematisk oppsummering av de ulike spilleksemplene kan illustreres med følgende bilde. Plasseringene er ikke entydige, men kun gjort som en litt upresis illustrasjon.

	Åpent	Åpent/lukket	Lukket
Strategispill	Nim, Sjakk		Børs, FD
Strategi/lotteri	Primo, 100	Kortspill	
Lotteri	Stigespill	Lotto	

Figur 11.

De spillene vi har gjennomgått i dette heftet er bare et lite utvalg av alle de mulige spill som finnes (og som ikke finnes enda). Spill egner seg godt som pedagogisk hjelpemiddel i ulike fag i skolen, ikke minst i matematikktimene. Men det er ingen grunn til å begrense seg til de som her er presentert, snarere tvert i mot. Det er både morsomt og lærerikt for både elever og lærere å lage sine egne spill. Det kan være lurt å først tenke gjennom hva man ønsker seg for deretter å skreddersy reglene til det behovet man har. Det er bare å bruke fantasien og å prøve seg fram. kanskje reglene kan bli til mens man spiller?

5. Avslutning

Som en avslutningskuriositet skal vi ta med et eksempel av en helt annen type enn det vi har sett på til nå, men likefullt innefor det som bør kalles spillteori.

Vi tenker oss at vi er tilbake i Victoriatiden. Tre passasjerer sitter i en liten togkupe, Bob, hans niese Alice og en gammel dame som i alle år har passet familiens barn, kjærlig omtalt som Nanny. Alle tre er, etter datidens normer, svært skitne i fjeset. Men siden ingen rødmer av skam, kan man med sikkerhet anta at ingen av dem faktisk vet at de ser ut som en feier. Med god victorians høflighet unnlater de alle å komme inn på temaet.

Like før de passerer en kjent landsby i Midt-England kommer en konduktør inn i kupeen og annonserer at “noen i denne kupeen er skitne i fjeset”. På denne tiden var jernbanens menn noen man ubetinget stolte blindt på, så ingen hadde den minste grunn til å tro at han ikke snakket sant. Attpåtil så de jo alle sammen at han faktisk snakket sant. Etter noen korte, noe trykkende og avventende sekunder skiftet plutselig en av de tre reisende ansiktsfarge til en mørkaktig rødtone, omtrent samme som overmodne tomater har på solsiden. Etter dette senket roen seg over reisefølget og alle sank tilbake i sine egne tanker. Muligens med unntak av den ene tomatrøde, som febrilsk lette etter en retrettmulighet som igjen kunne bringe selvrespekten opp på et anstendig nivå.

Hva skjedde egentlig? Fortalte ikke konduktøren forsamlingen noe de allerede visste?

For å forstå hva som førte til denne fryktelige erkjennelse med derpå følgende talende uttrykk for en av de tre reisende, må vi gå litt inn og lese herskapets victorianske tanker. La oss bruke Alice, med sin unge og ubesudlede tanke som eksempel.

Alice registrerer at hverken Nanny eller uncle Bob rødmer. Det får henne til å gjøre følgende resonement. “Anta at jeg er ren i ansiktet. Da ville uncle Bob tenke som følger: “Anta at jeg er ren i ansiktet. Da ser Nanny to rene og vakre fjes, nemlig mitt og Alices. Men konduktøren har sagt at noen er skitne og Nanny rødmer ikke. Altså må det være meg som er skitten. ”Men uncle Bob rødmer ikke, og det kan bare ha en grunn, resonementet mitt er galt. Å nei.”Dermed finner alt hennes ungpikeblod veien til det ytre hudlaget i ansiktet.

Nå er det selvfølgelig ikke bare Alice som gjør seg disse tankene. Bob og Nanny må også forventes å gjennomføre det samme resonementet. Den som rødmer er dermed den som er raskest til å løpe gjennom den gitte tankerekken, kombinert med en forestilling om at de andre også vil gjøre det samme. Hvem det blir kan selvfølgelig diskuteres, men er for så vidt irrelevant for vårt bruk.

Hvorfor senker roen seg over reisefølge etter at en av dem har rødmet?

6. Litteratur

Det finnes en god del litteratur om spill og spillteori. Her er et lite utvalg bøker,

[VM] Von Neumann, Morgenstern, "Theory of Games and Economic Behavior"
Princton Univ Press (1944).

[VO] Vorobev, "Game Theory"
Springer Verlag (1977).

[BI] Binmore, "Fun and Games"
Heath (1992).

[BF] Bierman, Fernandez, "Game Theory with Economic applications"
Addison-Wesley (1993).

og noen nettadresser.

http://www.maths.usyd.edu.au:8000/u/richardc/gametheory.html

http://www.cs.uidaho.edu/ casey931/mega-math/

http://www.ics.uci.edu/ eppstein/cgt/

http://www.sv.ntnu.no/iss/Han.Dorussen/GameTheory/Front.htm

http://www.doris-frank.de/classic/numthry.html

Men det morsomste er å søke seg fram på egenhånd. Prøv søkeord som *gametheory, spillteori* osv.

Appendix. Formell matematisk definisjon av spill

Vi kan gi en formell matematisk definisjon av et spill. Siden det ikke har noen betydning for definisjonene kan vi anta at vi kan ha flere enn to spillere. Vi lar I være mengden av spillere i spillet og vi antar at det er et endelig antall. En spiller $i \in I$ har til rådighet en mengde av strategier, S_i. Det betyr at spillet er beskrevet av et element i mengden $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n = \prod_{i \in I} S_i$, der $n = |I|$. For hvert element $s \in S$, kalt en **situasjon**, vil hver deltaker ha en gevinst. Vi skriver denne gevinsten som $H_i(s)$. Dermed kan vi lage en presis definisjon av et ikke-kooperativt spill.

DEFINISJON **(Ikke-kooperativt spill)**. *Et system*

$$\Gamma = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle$$

hvor I og S_i ($i \in I$) er mengder og H_i er funksjoner på $\prod_{i \in I} S_i$ med reelle verdier kalles et **ikke-kooperativt spill**.

DEFINISJON **(Nullsum-spill)**. *Et ikke-kooperativt spill Γ kalles et* **null-sum-spill** *hvis $\sum_{i \in I} H_i(s) = 0$ for alle situasjoner $s \in S$.*

Siden vi antar at enhver spiller forsøker å optimalisere sitt valg av strategi vet vi at en spiller alltid vil velge den strategien som gir størst utbytte. Dette kan vi formalisere på følgende måte.

La $s = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S$ være en valgt situasjon for et spill. Vi kan danne oss en ny situasjon ved å endre spiller i sin strategi. Vi skriver

$$s||s_i' \stackrel{\text{def}}{=} (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

Det er opplagt at $s||s_i' = s$ hvis og bare hvis $s_i = s_i'$. Vi kan nå definere hva vi mener med tillatte strategier.

DEFINISJON **(Tillatt strategi)**. *En situasjon s i et spill kalles* **tillatt for spiller** *i hvis for enhver annen strategi s_i' for denne spilleren, så har vi*

$$H_i(s||s_i') \leq H_i(s)$$

DEFINISJON **(Likevektssituasjon)**. *En situasjon s som er tillatt for alle spillerne i spillet kalles en* **likevektssituasjon** *for spillet.*

DEFINISJON **(Likevekts-strategi)**. *En* **likevekts-strategi** *for en spiller i et ikke-kooperativt spill er en strategi som opptrer i minst én likevekts-situasjon for spillet.*

Slike likevekter kalles ofte for Nash-likevekter, oppkalt etter matematikeren som først lanserte dette begrepet
En viktig del av teorien for ikke-koorporative spill består i å studere likevekts-situasjoner og -strategier, og i å angi metoder for å finne slike situasjoner og strategier. Det å angi en likevekts-situasjon for et ikke-kooperativt spill kalles ofte å finne en **løsning** for spillet.