matematikk.org

OPPGAVER FRA ABELS HJØRNE I DAGBLADET

SETT 20

DAG 1

1. En maur befinner seg ved hjørnet av en terning. På det diagonalt motsatte hjørnet er det en liten bit sukker som mauren har veldig lyst på. Mauren går bare langs kantene på terningen (ikke inn på selve sideflatene). Den korteste veien blir dermed å gå langs tre slike kanter. Hvor mange forskjellige slike korteste veier har mauren å velge mellom?

   A) 3 B) 6 C) 12 D) 27 E) 54

2. Noen 6-sifrete tall er slik at tallet formet av de tre første sifrene er det samme som tallet formet av de tre siste. Et par eksempler på slike tall er 247247 og 904904. Hva er det største hele tallet som alle slike 6-sifrete tall er delelig med?

   A) 1 B) 11 C) 91 D) 111 E) 1001

Løsninger:

1. *B*. Fra utgangspunktet har mauren tre kanter å velge mellom. Etter at den har gått langs en av disse, er det to nye kanter å velge mellom. Etter at den har gått langs en av disse, er det bare én kant som leder fram til sukkeret. Mauren må altså først velge mellom 3 muligheter, og deretter mellom 2 muligheter. Antall mulige kombinasjoner totalt blir dermed $2 \cdot 3 = 6$.

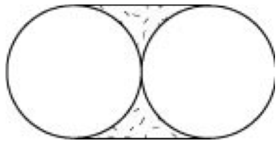
2. *E*. Tall som kan skrives "*abcabc*" er 1001 ganger tallet "*abc*", så alle slike tall er delelig med 1001. Siden differensen mellom tallene 100100 og 101101 er 1001, så finnes det ikke noe større heltall som begge er delelig med. Altså er 1001 den største felles faktor for slike 6-sifrete tall.

DAG 2

1. Firmaet *A* leier ut biler for 600 kroner per dag pluss 1,20 kroner per kilometer. Firmaet *B* leier ut biler for 850 kroner per dag pluss 0,70 kroner per kilometer. Hvor langt må man minst kjøre per dag for at det skal lønne seg å leie bil fra *B*?

   A) 50 km B) 100 km C) 200 km D) 333 km E) 500 km

2. Anta at sirklene på figuren har radius 1. Hva er da arealet av det skraverte området?



A) π B) $\frac{\pi}{4}$ C) $2-\frac{\pi}{2}$ D) $4-\pi$ E) $4-\frac{\pi}{2}$

Løsninger:

1. *E*. Hos *B* er prisen per dag 250 kroner mer enn hos *A*. Men man sparer 50 øre per kilometer ved å leie fra *B*. For å få spart inn de 250 kronene, må man kjøre minst $\frac{250}{0{,}50} = 500$ kilometer.

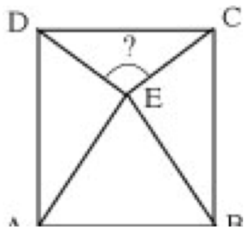
2. *D*. Trekk de to loddrette linjene som går gjennom sirklenes sentrum. Området på figuren mellom disse to linjene er da et kvadrat med sidelengde 2. Det uskraverte området i kvadratet har samme areal som en av sirklene, altså $\pi r^2 = \pi$. Arealet av det skraverte området blir dermed $4-\pi$.

DAG 3

1. Barna i en søskenflokk er i gjennomsnitt 9 år. Den eldste er 15 år, og gjennomsnittsalderen på de øvrige er 7 år. Hvor mange barn er det i søskenflokken?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2. På figuren er *ABCD* et kvadrat og *ABE* en likesidet trekant. Hvor mange grader er vinkelen *DEC*?



A) 108 B) 120 C) 135 D) 144 E) 150

Løsninger:

1. *B*. Anta at det er x barn. Til sammen er disse barna $9x$ år. Ser vi bort fra den eldste, blir gjennomsnittsalderen av de øvrige $\frac{9x-15}{x-1}$ år. Setter vi dette lik 7, får vi likningen $9x - 15 = 7x - 7$ som gir $2x = 8$ og dermed $x = 4$. Altså er det fire barn i søskenflokken.

2. E. Siden ABE er likesidet er vinkel $EAB = 60°$. Da blir vinkel $DAE = 90° - 60° = 30°$. Siden $AD = AB = AE$ er trekant AED likebeint, og vinklene ADE og AED er like. $ADE + AED = 180° - 30° = 150°$, og dermed er $ADE = 75°$. Dette gir videre at vinklene EDC og DCE er $15°$, og dermed er vinkel $DEC = 180° - 15° - 15° = 150°$.

DAG 4

1. Hege og Nina er to søstre. Hvis Hege hadde vært 3 ganger så gammel som hun er nå, så hadde hun vært ett år eldre enn Nina. Og hvis Nina hadde vært halvparten så gammel som hun er nå, så ville hun vært ett år eldre enn Hege. Hvor gamle er Hege og Nina til sammen?

   A) 9 år B) 11 år C) 15 år D) 19 år E) 23 år

2. Hvis $\frac{1}{2x+3} = \frac{2}{5}$, hva er da $\frac{1}{2x+1}$?

   A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $-\frac{8}{5}$

Løsninger:

1. B. Hege er 3 år, og Nina er 8 år. For å komme fram til dette, kan vi anta at Hege er x år. Den første betingelsen sier da at Nina er $3x - 1$ år. Videre sier den andre betingelsen at $2(x - 1) = 3x - 1$. Løser vi denne likningen, får vi $x = 3$.

2. A. Snur vi på brøkene i den oppgitte likheten, får vi $2x + 3 = \frac{5}{2}$. Dette gir at $2x + 1 = \frac{1}{2}$, og dermed er $\frac{1}{2x+1} = 2$.

DAG 5

1. Gry har nettopp kjøpt ny leilighet og trenger å innrede kjøkkenet. I en butikk finner hun en komfyr som er nedsatt med 10%, og et kjøleskap som er nedsatt med 20%. Den opprinnelige prisen på kjøleskapet var en og halv ganger den opprinnelige prisen på komfyren. Gry kjøper både komfyren og kjøleskapet. Hvor stor rabatt fikk hun totalt i forhold til opprinnelig pris?

   A) 15% B) 16% C) 16,66% D) 23,33% E) 30%

2. Hvis du kaster tre vanlige terninger, hva er sannsynligheten for å få et par? (dvs. minst to terninger må vise det samme.)

   A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{4}{9}$

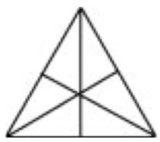
Løsninger:

1. *B*. La oss tenke oss at komfyren opprinnelig kostet 4000 og kjøleskapet 6000. Etter at rabatten er trukket fra, koster komfyren 3600 og kjøleskapet 4800. Totalt må hun altså betale 8400 for noe som opprinnelig kostet 10000. Den samlede rabatten er dermed 1600, og det utgjør 16% av opprinnelig pris.

2. *E*. Vi regner først ut sannsynligheten for at alle terningene viser forskjellig. Vi kan tenke oss at terningene kastes en etter en. Den andre terningen vi kaster har da $\frac{5}{6}$ sjanse for å vise forskjellig fra den første. Hvis de to første terningene viser forskjellig, har den tredje terningen $\frac{4}{6}$ sjanse for å være forskjellig fra begge disse. Sannsynligheten for at alle de tre terningene viser forskjellig er dermed $\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$. Sannsynligheten for det motsatte, dvs. at vi får minst to som er like, er dermed $\frac{4}{9}$.

DAG 6

1. Hvor mange trekanter er det på figuren?



   A) 12 B) 13 C) 15 D) 16 E) 19

2. Eva har eksamen i sosiologi. Etter at en tredjedel av eksamenstiden er gått, må Eva ut og ha en pause. Når hun kommer tilbake etter 16 minutter, har hun fremdeles 60% av eksamenstiden igjen. Hvor lenge varer Evas eksamen?

   A) 3 timer B) 4 timer C) 5 timer D) 6 timer E) 8 timer

Løsninger:

1. *D*. Anta at hver av de 6 små trekantene har areal 1. I tillegg til disse 6 er det 3 trekanter med areal 2, 6 med areal 3, og 1 med areal 6. Totalt blir det $6 + 3 + 6 + 1 = 16$ trekanter.

2. *B*. Hvis x er antall minutter eksamen varer, så sier oppgaven at $\frac{x}{3} + 16 = 0{,}40x$.

   Dette kan vi skrive om slik: $\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\right)x = 16$, eller $\frac{x}{15} = 16$. Dette gir at $x = 15 \cdot 16$.

   Eksamen varer altså i 16 kvarter, som er det samme som 4 timer.

DAG 7

1. Tenk deg at du har et kvadratisk papirstykke som er 1 x 1 meter. Hvis du bretter langs en diagonal, får du en rettvinklet trekant. Denne trekanten brettes på nytt slik at du får en ny rettvinklet trekant. Du fortsetter å brette trekanten to ganger til, slik at du etter hver bretting har en rettvinklet trekant. Hvor lang er den lengste siden i trekanten du ender opp med etter fire brettinger?

   A) 2,5 cm B) 17,7 cm C) 25 cm D) 33,3 cm E) 50 cm

2. Hvis $a^2 + b^2 = 4$, hva er da minste mulige verdi av ab?

   A) –4 B) –2 C) –1 D) 0 E) 2

Løsninger:

1. *E*. Etter første bretting er trekantens korte side 1 meter, og etter to brettinger vil dette være trekantens lengste side. Etter den neste bretten vil trekantens korte side være 50 cm, og etter den siste bretten vil dette være trekantens lengst.

2. *B*. Siden alle kvadrater er større eller lik null er $(a+b)^2 \geq 0$. Ganger vi ut parentesen, får vi $a^2 + b^2 + 2ab \geq 0$, og dermed $2ab \geq -(a^2 + b^2) = -4$. Altså er $ab \geq -2$. Hvis vi velger $a = \sqrt{2}$ og $b = -\sqrt{2}$ er $ab = -2$, samtidig med at betingelsen $a^2 + b^2 = 4$ oppfylt. Altså er -2 den minste mulige verdi av ab.