OPPGAVER FRA ABELS HJØRNE I DAGBLADET

SETT 5

DAG 1

1. Dersom vi dobler et bestemt tall, og så legger til 8, får vi to mindre enn tre ganger tallet vi begynte med. Hvilket tall begynte vi med?

   A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

2. Hva er det minste positive hele tall som 24 må multipliseres med for at resultatet skal bli et kvadrattall?

Løsninger:

1 *A*. Hvis det opprinnelige tallet er x så sier oppgaven at $2x + 8 = 3x - 2$. Ordner vi litt på denne likningen, får vi $x = 10$.

2. Primtallsfaktoriseringen av 24 er $2^3 \cdot 3$. For at et tall skal være et kvadrat må alle eksponenter i primtallsfaktoriseringen være partall. Det minste slike tall som har $2^3 \cdot 3$ som faktor er $2^4 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144$, som er $24 \cdot 6$. Tallet det spørres om er altså 6.

DAG 2

1. Vi har noen kuber med sidelengde 1 som vi vil sette sammen til en kube med sidelengde 2. Hvor mange små kuber må vi bruke?

   A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 16

2. Martin kjørte en runde i en seks kilometer lang racerbilbane. I de første 3 kilometerne holdt han en gjennomsnittsfart på 150 km/h; de neste to en gjennomsnittsfart på 200 km/h, og den siste kilometeren holdt han 300 km/h i gjennomsnitt. Hva var gjennomsnittsfarten gjennom hele turen?

   A) 180 km/h B) 192 km/h C) 200 km/h D) 208,33 km/h E) 216,66 km/h

Løsninger:

1. *D*. Volumet av de små kubene er 1, og volumet av den store er $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, så vi må ha 8 små kuber. Alternativ løsning: Vi må ha en kube for hvert av hjørnene i den store kuben, og en kube har 8 hjørner.

2. *A*. På de første 3 kilometerne brukte han $\frac{3}{150}$ timer, på de to neste $\frac{2}{200}$ timer, og på den siste $\frac{1}{300}$ timer. Til sammen blir dette $\frac{3}{150} + \frac{2}{200} + \frac{1}{300} = \frac{6}{300} + \frac{3}{300} + \frac{1}{300} = \frac{10}{300} = \frac{1}{30}$ timer på hele turen. Gjennomsnittsfarten blir $\frac{6}{\frac{1}{30}}$ km/h $= 6 \cdot 30$ km/h $= 180$ km/h.

DAG 3

1. Nils fyller vann i badekaret sitt. Det tar 1 minutt fra badekaret er $\frac{1}{4}$ fullt til det er $\frac{1}{3}$ fullt. Hvis badekaret er tomt, hvor mange minutter tar det å fylle opp hele?

   A) 4 B) 6 C) 8 D) 12 E) 16

2. En gjeng matematikkstudenter bestemmer seg for å bestille pizza for 300 kroner og dele utgiftene likt. Når maten kommer, finner to av dem ut at de ikke har penger i det hele tatt, og de resterende studentene må betale 40 kroner ekstra hver. Hvor mange studenter var det totalt med i gjengen?

   A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

Løsninger:

1. D. $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, så det tar ett minutt å fylle $\frac{1}{12}$, og dermed 12 minutter å fylle opp hele.

2. A. Anta at det var N studenter. Da skulle egentlig alle ha betalt $\frac{300}{N}$, men siden to av studentene ikke har penger må $2 \cdot \frac{300}{N}$ betales ekstra av de $N - 2$ andre. Likningen $2 \cdot \frac{300}{N} = 40(N-2)$ kan skrives om til $40N^2 - 80N - 600 = 0$ eller $N^2 - 2N - 15 = 0$ eller $(N-5)(N+3) = 0$, som har $N = 5$ som eneste positive løsning.

DAG 4

1. En plante er nå 12 cm høy og vil vokse 2 cm per uke. En annen plante er 3 cm høy og vil vokse 5 cm per uke. Om hvor mange uker er plantene like høye?

   A) 2 B) 3 C) 3,5 D) 4 E) 5

2. 4 gutter kjøpte en båt til 6000 kroner. Den første gutten betalte halvparten av hva de tre andre betalte til sammen, den andre gutten betalte $\frac{1}{3}$ av det de andre betalte til sammen, og den tredje gutten betalte $\frac{1}{4}$ av det de andre betalte til sammen. Hvor mye betalte den fjerde gutten?

   A) 1100 kr B) 1200 kr C) 1300 kr D) 1400 kr E) 1500 kr

Løsninger:

1. B. Den ene planten er 9 cm høyere enn den andre, mens den andre vokser 3 cm mer enn den første per uke. Den andre planten bruker dermed 3 uker på å ta igjen de 9 cm den ligger bak.

2. C. Hvis den første gutten betalte K kroner, må de andre ha betalt $2K$. $K + 2K = 6000$ gir at $K = 2000$. Tilsvarende finner vi at den andre gutten må ha betalt 1500 kroner, og den tredje 1200 kroner. De tre første guttene har altså betalt 4700 kroner til sammen. Den siste gutten må da ha betalt $(6000 - 4700)$ kroner $= 1300$ kroner.

DAG 5

1. Et palindromtall er et tall som er det samme hvis man leser det motsatt vei. For eksempel er 313, 11 og 6006 palindromtall. Kilometertelleren i en bil viser 15951. Hvor mange kilometer må bilen kjøre før neste palindromtall viser seg på kilometertelleren?

   A)50 B) 110 C) 111 D) 210 E) 211

2. Noen sekunder etter midnatt på nyttårsaften knipser Knut en gang med fingrene. Ett minutt senere knipser han igjen. To minutter etter det, knipser han på nytt. Etter fire nye minutter knipser han igjen, og åtte minutter etter det igjen, og så videre, slik at tidsintervallet mellom to knips alltid er det dobbelte av det mellom de to forrige. Hvor mange ganger knipser Knut i løpet av 1. januar?

   A)11 B) 17 C) 23 D) 41 E) 59

Løsninger:

1. B. 16061 er det neste palindromtallet og $16061 - 15951 = 110$.

2. A. Et døgn består av $60 \cdot 24 = 1440$ minutter. Knut knipser for 2. gang etter 1 minutt, for 3. gang etter 3 minutter, for 4. gang etter 7 minutter, og mer generelt, for N. gang etter $2^{N-1} - 1$ minutter. Nå er $2^{10} = 1024$ og $2^{11} = 2048$, slik at hans 11. og siste knips for dagen skjer 1023 minutter etter midnatt.

DAG 6

1. I en tennisturnering er det 64 deltakere. Taperen i hver kamp går ut av turneringen, mens vinneren går videre. Hvor mange kamper trengs for å kåre en vinner?

   A)32 B) 33 C) 62 D) 63 E) 64

2. Maleren Roar kan male et bestemt hus på 4 dager. Lærlingen hans trenger 6 dager på å male huset. De bestemmer seg for å male huset sammen, og de er like effektive som når de jobber alene. Hvor mange dager bruker de på jobben?

   A) 10 B) 5 C) 3 D) 2,4 E) 1,5

matematikk.org

Løsninger:

1. *D*. Siden det slås ut én spiller etter hver kamp så tar det 63 kamper for at antall gjenværende spillere er redusert fra 64 til 1.

2. *D*. Roar maler $\frac{1}{4}$ hus per dag, og lærlingen maler $\frac{1}{6}$ hus per dag. Til sammen maler de $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$ hus per dag. Dermed bruker de $\frac{12}{5}=2{,}4$ dager på å male ett hus sammen.

DAG 7

1. Dersom desember inneholder 5 søndager et bestemt år, hvilke mulige ukedager kan julaften, 24. desember, falle på dette året?

2. Maria deltar i en stupkonkurranse der hvert stup gis en heltallig karakter mellom 0 og 10. Hun får samme karakter på alle stupene bortsett fra det siste, der hun får karakteren 10. Etter konkurransen ser hun at gjennomsnittskarakteren for alle stupene hennes er 5. Hvor mange stup gjorde hun?

   A)5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

Løsninger:

1. Det er en differanse på 28 mellom datoene på 1. og 5. søndag i en måned. Mulighetene for dette i desember er dermed 1. og 29., 2. og 30., 3. og 31. Det vil si at den 31. desember må falle på enten søndag, mandag eller tirsdag. Julaften faller på samme ukedag som 31. desember, altså enten på søndag, mandag eller tirsdag.

2. *B*. Anta at Maria gjorde N stup før det siste, og fikk karakteren x på alle disse stupene. Gjennomsnittskarakteren kan da uttrykkes ved $\frac{xN+10}{N+1}=5$. Skriver vi litt om på dette, får vi $xN+1+=5N+5$ eller $(5-x)N=5$. Siden N og x er hele tall, og 5 er et primtall, får vi $N=5$ og $N=4$ som eneste mulighet. Maria gjorde altså $N+1=6$ stup i konkurransen.

PGS AkerBP