OPPGAVE 4 – LØSNINGSFORSLAG

Tallfølgen i f) rektangeltallene. Her er den eksplisitte formelen $R_n = n(n+1)$ eller $R_n = n^2 + n$. Dette er en andregradsfunksjon. I figurtallsammenheng forutsetter vi at den lengste "siden" er (nøyaktig) 1 større enn den korteste.

OPPGAVE 5 – LØSNINGSFORSLAG

UTVIKLING AV REKURSIV FORMEL FOR FIGURTALL SOM GIR ANDREGRADSFUNKSJONER

Den "enkleste" andregradsfunksjonen er $y = x^2$. Den representerer kvadrattallene, som har eksplisitt formel $K_n = n^2$. La oss finne den rekursive formelen. Dersom vi kjenner K_n, hva blir da K_{n+1}?
Vi skjønner at det blir et større tall, men hvor mye større?
$K_n = n^2$ representerer arealet av et kvadrat med sider lik *n*. Dersom sidene er $n+1$, må arealet være $(n+1)^2$ eller $(n+1)(n+1)$. Arealet blir $n^2 + 2n + 1$. Så $K_{n+1} = n^2 + 2n + 1$.
Tillegget vi må gi K_n for å få K_{n+1} er altså $2n+1$. Så da har vi den rekursive formelen:
$K_{n+1} = K_n + 2n + 1$.
For sikkerhets skyld kan vi jo kontrollere at det stemmer. For eksempel:
Dersom vi kjenner K_{48} (som er 48^2) skal vi finne $K_{49} = K_{48} + 2 \cdot 48 + 1$ (som jo bør bli det samme som 49^2).

Noen ganger kan det være en utfordring å finne formlene. Da må vi ty til andre metoder.

For å illustrere kan vi sette opp følgende tabell for kvadrattallene:

Tall	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	$K_{.....}$	K_n	K_{n+1}
Tallverdi	1	4	9	16				
1. differanse	3	5	7					
2. differanse	2	2						

Tabell 2
Vi ser at økningen fra K_1 til K_2 er 3. Fra K_2 til K_3 er økningen 5 og så videre. Den andre økningen er altså 2 større enn den første. Så 1. differansen øker med 2. differansen som er en konstant lik 2. Vi kan sette:
$K_2 = K_1 + 2 \cdot 1 + 1$ (Vi "ser" at vi må legge til den siste 1´eren for å få 4.)
$K_3 = K_2 + 2 \cdot 2 + 1$ (Her stemmer det også å legge til 1 ekstra.)
$K_4 = K_3 + 2 \cdot 3 + 1$ (Og her også.)
Vi ser at uansett hvilket K-tall vi tar utgangspunkt i, får vi det neste ved
$K_{n+1} = K_n + 2 \cdot n + 1$
Og vi ser at formelen ble den samme som vi fikk tidligere.

OPPGAVE 6 – LØSNINGSFORSLAG

REKTANGELTALL OG TREKANTTALL

Vi kan lage tilsvarende tabeller (eller bruke tabellene nedenfor) for rektangeltallene og trekanttallene – og finne rekursiv formel. Her er R_0 med. I den eksplisitte formelen vil verdien her tilsvare c-leddet, altså når n = 0.

Rektangeltallene:

Tall	$\boldsymbol{R_0}$	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	$R_{.....}$	R_n	R_{n+1}
Tallverdi	***0***	2	6	12	20				
1. differanse		***2***	4	6	8				
2. differanse		***2***	2	2					

Tabell 3

Når vi vet at 2. differansen er 2, kan vi "regne oss tilbake" – og finner at $R_0 = 0$. Det betyr at vi ikke har noe c-ledd, og det stemmer jo med det vi fant foran.

Så har vi trekanttallene. Vi kan betrakte dem som halvparten av rektangeltallene:
For eksempel ser rektangeltall nummer 3 slik ut:

x x x x
x x x x
x x x x

Her er dette delt – og vi fikk fram trekanttall nummer 3. Det kan vi framstille slik:

x
x x
x x x

Trekanttallene:

Tall	$\boldsymbol{T_0}$	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	$T_{.....}$	T_n	T_{n+1}
Tallverdi	***0***	1	3	6	10				
1. differanse		***1***	2	3	4				
2. differanse		***1***	1	1					

Tabell 4

V ser at dette stemmer med den eksplisitte formelen, som gir verdien halvparten av rektangeltallene, altså $T_n = \dfrac{(n+1)\cdot n}{2}$

Også her ble $T_0 = 0$, altså er c = 0.

Tilsvarende blir det også for kvadrattallene.

OPPGAVE 7 – LØSNINGSFORSLAG

FINN REKURSIV FORMEL PÅ TO MÅTER

Vi lager ei tallfølge ut fra den eksplisitte formelen $F_n = n^2 + 5n + 7$
Formelen gir denne tallfølgen: 13, 21, 31, 43, …

Og ser slik ut i tilsvarende tabell som vi har brukt før:

Tall	$\boldsymbol{F_0}$	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	$F_{.....}$	F_n	F_{n+1}
Tallverdi	*7*	13	21	31	43				
1. differanse	***6***	8	10	12					
2. differanse	***2***	2	2						

Tabell 5

Her ser vi at 6 framkommer når vi trekker 2 fra 8 – altså er 1. differansen fra F_0 til F_1 lik 6. Og denne differansen kan vi "skille ut", slik at vi får at den rekursive formelen er gitt ved
$F_{n+1} = F_n + a \cdot n + 6$ Ser vi så på utviklingen, får vi

$F_2 = F_1 + 2 \cdot 1 + 6$
$F_3 = F_2 + 2 \cdot 2 + 6$
osv

Den rekursive formelen kan altså skrives som $F_{n+1} = F_n + 2 \cdot n + 6$

Vi kan også merke oss at $F_0 = 7$, som er c-leddet i den eksplisitte formelen. (Å regne ut 1. differansen fra F_0 til F_1, vil lette arbeidet når vi skal finne formler.)
Det vi har sett på nå, er én metode å finne rekursiv formel på.

En annen metode, som forutsetter at vi først har funnet den eksplisitte formelen, er å regne ut F_n og F_{n+1} hver for seg, og så finne forskjellen mellom dem. Denne forskjellen legger vi til F_n for å finne F_{n+1}. Det var den metoden vi brukte tidligere med kvadrattall.

Generelt har vi at:

$F_{n+1} = F_n + \text{Tillegg}$

Da må vi også ha at:

$\text{Tillegg} = F_{n+1} - F_n$

Dette er en grei metode når vi har relativt enkle uttrykk, mens det kan bli en del regning (som gir god øvelse!) dersom uttrykkene er mer kompliserte. Dessuten forutsetter den siste metoden at vi først finner eksplisitt formel. Ofte er imidlertid det enklest, som i eksemplet med kvadrattallene.

OPPGAVE 8 - LØSNINGSFORSLAG

UTVIKLING AV EKSPLISITT FORMEL

For førstegradsuttrykk er det oftest relativt greit å finne eksplisitt formel. Her er det bare en 1. differanse. Tidligere så vi at partallene kan skrives slik: $P_n = 2n$ og at oddetallene kan skrives slik: $O_n = 2n - 1$.

Har vi denne tallrekka:

3, 9, 15, 21, ….

ser vi at vi legger til 6 for hvert ”skritt”, så 1. differansen er konstant lik 6, mens 2. differansen er 0.

Da kan vi bruke metoden vi har benyttet foran, til å vise at den rekursive formelen er

$F_{n+1} = F_n + 6$ (Det gir seg jo egentlig selv.)

Litt verre blir det å finne den *eksplisitte* formelen – altså en formel som gir oss tallverdien uansett hvilket nummer, *n*, i rekka vi har.

Siden dette er et førstegradsuttrykk (det er det alltid når det bare er 1. differanse), er det generelle uttrykket $y = ax + b$. Vi skriver det som:

$F_n = an + b$

Vi har at $F_1 = 3$. Det betyr at $a \cdot 1 + b = 3$, som gir $b = 3 - a$. Og siden $F_2 = 9$, har vi at $a \cdot 2 + b = 9$. Ovenfor så vi at $b = 3 - a$. Vi setter inn i $2a + b = 9$ og får $2a + 3 - a = 9$ som gir $a = 6$.

Siden $b = 3 - a$ får vi at $b = 3 - 6$, altså er $b = -3$.

Dermed har vi den eksplisitte formelen:

$F_n = 6n - 3$

Dette gir fine eksempler på likningssett med to ukjente.

Siden funksjonen bare er definert for hele tall (vi opererer jo med tallfølger), gir funksjonen egentlig ikke ei linje, men punkter (en punktfunksjon).

OPPGAVE 9 – LØSNINGSFORSLAG

UTVIKLING AV EKSPLISITT FORMEL FOR FIGURTALL SOM GIR ANDREGRADSFUNKSJONER

Vi har allerede sett på K-tall, R-tall og T-tall.

Nå skal vi utvikle en metode (eller flere) for å finne den eksplisitte formelen også for andre figurtall som har utgangspunkt i andregradsfunksjoner. I slike tilfeller vet fra det vi har sett på tidligere, at det er en konstant andredifferanse.
Vi husker også på at den generelle formelen for en andregradsfunksjon er
$f(x) = ax^2 + bx + c$ eller eventuelt $y = ax^2 + bx + c$
Eller som vi vil skrive for figurtall:
$F_n = an^2 + bn + c$
Vi prøver oss på tallfølgen
9, 15, 23, 33, ….

Vi setter inn i tabell:

Tall	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	$F_{.....}$	F_n	F_{n+1}
Tallverdi	9	15	23	33				
1. differanse		6	8	10				
2. differanse		2	2					

Tabell 6

Ved å bruke metoden vi benyttet tidligere, kan vi vise at den *rekursive* formelen er

$$F_{n+1} = F_n + 2n + 4$$

Den *eksplisitte* formelen kan vi finne ved å sette opp tre likninger med tre ukjente a, b og c.
Vi hadde jo at den generelle eksplisitte formelen er

$$F_n = an^2 + bn + c$$

Men her kjenner vi verken a, b eller c. Imidlertid vet vi at
$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 9$, som gir $a + b + c = 9$
$a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 15$, som gir $4a + 2b + c = 15$
$a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 23$, som gir $9a + 3b + c = 23$

Så da har vi tre likninger med tre ukjente og kan finne a, b og c.

Nå er det selvsagt et spørsmål hvor mange som behersker metoder for å løse likningssett, så vi viser en annen metode også.

Vi kan ha oppdaget at a er halvparten av andredifferansen. (Dette kan selvsagt vises ved henvisning til derivasjon og integrasjon.) Altså: $a = 1$.

Hva får vi dersom vi regner oss tilbake til F_0 – tallet foran F_1?

Siden 2. differansen er 2, må tillegget fra F_0 til F_1 være 4, så da er $F_0 = 5$
Og F_0 har vi når $n = 0$. Altså er $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 5$ og dermed har vi at $c = 5$.
Da kjenner vi både a og c og kan sette
$F_n = 1 \cdot n^2 + bn + 5$. Så utnytter vi at for $n = 1$ har vi at $F_1 = 9$, og da får vi
$1^2 + b \cdot 1 + 5 = 9$ – og vi finner at $b = 3$.

Dermed har vi den eksplisitte formelen:

$$F_n = n^2 + 3n + 5$$