Matematisk julekalender for 8. - 10. trinn, 2010

Årets julekalender for 8.-10. trinn består av 9 enkeltstående. Oppgavene kan løses uavhengig av hverandre, og alle svar tilsvarer en bokstav. Bokstavene finner dere i bokstavtabellen sist i oppgavesettet. Når dere har alle 9 bokstavene skal disse settes sammen til et norsk ord, og det er dette ordet som er løsningen på julekalenderen for 8.-10. trinn. Oppgavene er nummerert, men rekkefølgen har ingenting å si – bokstavene må uansett stokkes om.

Stikkord for årets løsning er "på julehimmelen".

Opplegget kan passe til en kosetime før jul, eller klassene kan velge å løse noen oppgaver hver dag i desember. Dersom klassen skal bruke opplegget i én kosetime kan det lønne seg å dele opp i grupper og dele ut oppgaver slik at alle oppgavene blir forsøkt løst i løpet av timen. De "letteste" oppgavene kommer først.

Klasser som ønsker å konkurrere om å vinne premier må sende inn løsningsordet i en e-post til **julekalender8-10@matematikk.org** innen 7. januar 2011. **Det er læreren som på vegne av trinnet/gruppen skal sende inn løsningsordet.**

Innholdet i e-posten må være:

Løsningsord

Klasse(r):
Antall elever som har deltatt:
Kontaktpersons e-postadresse:
Skole:
Skolens postadresse:

Innsendingsfrist for konkurransen er 7. januar 2011.

Vinnerne offentliggjøres via startsiden, www.matematikk.org 11. januar kl. 12.00.

Spørsmål kan sendes til post@matematikk.org.

Lykke til med oppgavene, og god jul!

Oppgavene er laget av matematikk.org med inspirasjon fra nrich.org

OPPGAVE 1:

Babek, Christian, Jarle og Snorre er fire menn som har fire helt forskjellige yrker. En av dem jobber som lærer, en annen som snekker, en av dem er mekaniker og en er programmerer (men ikke nødvendigvis i denne rekkefølgen).

> Babek og Christian er naboer, og bytter på å kjøre hverandre til jobb.
> Christian tjener mer enn Jarle.
> Babek slår Snorre i tennis (hver gang!).
> Læreren går alltid til jobb.
> Programmereren bor ikke i nærheten av snekkeren.
> Mekanikeren og programmereren har truffet hverandre én gang.
> Programmereren tjener mer enn snekkeren og mekanikeren.

Dagens bokstav er forbokstaven i navnet til programmereren.

OPPGAVE 2:

4 kronestykker i rekkefølge, alle med mynt-siden opp (M M M M).

Legg fire kronestykker etter hverandre med mynt opp (M M M M). Start med å snu den første mynten. I neste trekk skal du snu både den første mynten og den andre mynten. Det tredje du skal gjøre er å snu de tre første myntene. I det fjerde trekket skal du snu alle fire myntene. Det femte trekket består i å snu kun den første mynten igjen, det sjette er å snu den første og andre mynten, og slik fortsetter du.

Hvordan vil rekkefølgen av kron og mynt være på kronestykkene være etter 1 995 trekk?

OPPGAVE 3:

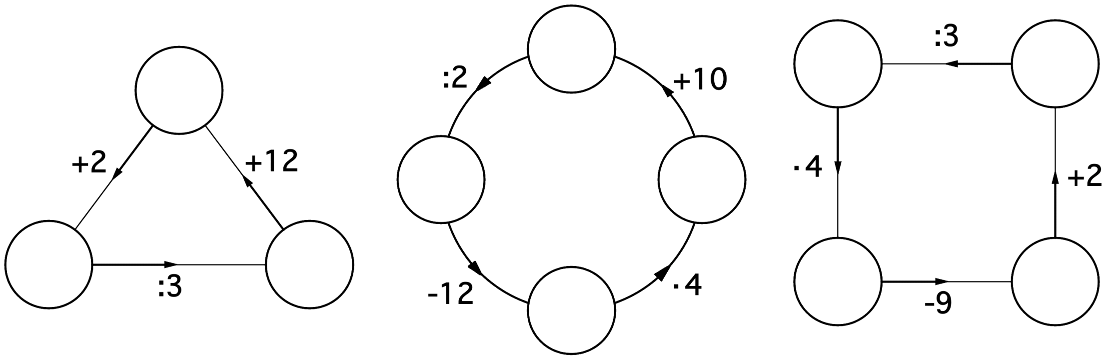
Klarer du å finne koden til sykkellåsen min? Du skal få noen hint

- Det er et tresifret tall mindre enn 200.
- Tallet er lik summen av påfølgende tall i tallfølgen 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, …
- Tallet er likt summen av hvert siffer opphøyd i tredje potens.

Hvilket tall har jeg som kode på sykkellåsen min?

OPPGAVE 4:

Bestemor Glemsk har låst julegavene til barnebarna inne i safen, men hun har selvsagt glemt kombinasjonen som består av to tall. Hun finner fram lappen hun bruker for å huske kombinasjonen.



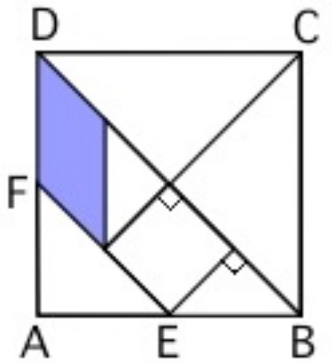
Sett inn heltall slik at regnestykkene i figurene alltid stemmer når du går rundt figuren i den retningen pilene viser.

De to tallene som går igjen i alle tre regnefigurene vil gi deg låsekombinasjonen dersom du setter dem i stigende rekkefølge.

OPPGAVE 5:

Et 12 cm x 12 cm kvadrat er satt sammen av sju deler, hvor $AE = AF = \frac{1}{2}AB$.

Hva er arealet av det fargelagte området, og hva heter denne geometriske figuren?



OPPGAVE 6

JA, eller NEI ?

Er det mulig å finne tre hele tall som har sum 1 og produkt 36?

OPPGAVE 7:

En mann ville ha belegningsstein i hagen. Han kjøpte kvadratiske steiner, og brola et kvadratisk område. Da han var ferdig med å legge ut alle steinene syntes han at området ble for lite, så han reiste ut og kjøpte inn 100 nye kvadratiske belegningsstein av samme størrelse som de forrige. Da han var ferdig utbrøt han – ja, dette ble et flott kvadrat!

Hvor mange belegningsstein brukte han til sammen?

OPPGAVE 8:

Lengden til et rektangel skal økes med 50 % uten at arealet endres. Hvor mange prosent må bredden reduseres for at arealet skal være uforandret?

OPPGAVE 9

Bokstaven $\boldsymbol{x}$ står for et tall som er større enn 0, men mindre enn 1.

Når du har fått disse opplysningene om x, hvilket av disse tallene blir størst?

$x^2 + x$ $\qquad$ x^2 $\qquad$ x^3 $\qquad$ $x^3 + x^2$ $\qquad$ x^4

BOKSTAVTABELL

Svar	Tilsvarer bokstav	Svar	Tilsvarer bokstav	Svar	Tilsvarer bokstav
JA	**T**	(M K M K)	**I**	150	**K**
NEI	**P**	(M M M M)	**U**	151	**G**
$x^2 + x$	**E**	(K M K M)	**E**	152	**F**
x^2	**A**	(K K M K)	**A**	153	**R**
x^3	**I**	18, parallellogram	**N**	576	**P**
$x^3 + x^2$	**Å**	18, trapes	**P**	625	**T**
x^4	**O**	24, parallellogram	**M**	676	**N**
19 og 21	**F**	24, trapes	**B**	766	**L**
7 og 19	**J**	33,3 %	**E**		
7 og 21	**B**	50,0 %	**O**		
19 og 38	**L**	55,5 %	**A**		
		66,7 %	**I**		

KOMMENTARER/TIPS og svar på oppgavene

Oppgave 1:

Babek er snekker, Christian er mekaniker, Jarle er lærer og Snorre er programmerer.

Oppgave 2:

Å skulle holde oversikt over hva som skjer i alle de 1995 trekkene er (bortimot) umulig og veldig tidkrevende, så her gjelder det å tenke systematisk – se etter mønster og noter resultater på en oversiktlig og systematisk måte!

Tips: bruk kronestykker, eller tegn myntene skjematisk.

Startposisjon:	M	M	M	M
1. trekk	K	M	M	M
2. trekk	M	K	M	M
3. trekk	K	M	K	M
4. trekk	M	K	M	K
5. trekk	K	K	M	K
6. trekk	M	M	M	K
7. trekk	K	K	K	K
8. trekk	M	M	M	M

Tabellen viser trekk for trekk hvordan rekkefølgen på kronestykkene vil være. Etter det åttende trekket ser vi at vi er tilbake i startposisjonen, og dette betyr at vi har en sirkel med periode på 8. Siden delestykket 1995 : 8 gir 249 med 3 som rest vet vi at etter 1995 trekk, vil vi være på samme sted som etter 3. trekk, altså K M K M.

Oppgave 3:

Legg nøye merke til kravene!
Det er bare 4 mulige tresifrede tall som kan lages av **påfølgende** ledd i tallfølgen, nemlig
24 + 120 = 144
6 + 24 + 120 = 150
2 + 6 + 24 + 120 = 152
1 + 2 + 6 + 24 + 120 = 153

Det eneste tallet som tilfredsstiller kravet om at tallet er lik summen av hvert siffer opphøyd i tre er 153, fordi $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27$.

Oppgave 4:

For å løse denne oppgaven kan vi f.eks prøve og feile, eller vi kan sette regnestykkene opp som likninger.

Husk at det bare er heltall som skal inn i figurenes regnestykker – det lønner seg å tenke delelighet og gangetabeller.

Ved regning kan det f.eks løses på følgende måte:

Trekanten: La x være størrelsen på toppen av trekanten. Da får vi at

$$\frac{x+2}{3}+12=x$$

Løser vi likningen får vi en unik løsning, nemlig x = 19.

Sirkelen: La x være størrelsen på "toppen" av sirkelen. Da får vi at

$$(\frac{x}{2}-12)\cdot 4+10=x$$

Dette gir den unike løsningen x = 38.

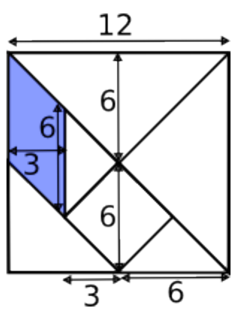
Kvadratet: La x være størrelsen i det øvre, venstre hjørne. Da får vi at

$$\frac{4x-7}{3}=x$$

Her ender vi opp med x = 7.

Tallene 7 og 19 er med i alle tre regnefigurene.

Oppgave 5:



Figuren heter parallellogram og har grunnlinje lik 6 cm og høyde 3 cm. Arealet til parallellogramet er 18 cm.

Oppgave 6

JA, det er mulig.
Start med å faktorisere produktet. Husk vi er på jakt etter tre forskjellige hele tall, $36=6\cdot 6=6\cdot 3\cdot 2$.

Nå har vi tre forskjellige heltall hvor produktet blir 36, men summen blir ikke 1 (2+3+6=11). Løsningen er å benytte både positive og negative tall.
Én mulighet er $36 = 6 \cdot (-3) \cdot (-2)$, og dette stemmer, for 6 + (-3) + (-2) = 1.

Oppgave 7:

Siden området er kvadratisk må vi undersøke kvadrattallene. Vi er på jakt etter to kvadrattall med 100 som differanse.

Tenk smart. To kvadrattall som er mindre enn 100 vil ikke gi differanse på 100, derfor lønner det seg å begynne med å sjekke tallene fra og med 10^2 og oppover.

(Eller dere kan finne ut og lære om Pytagoreiske talltripler:

x^2 = antall brosteiner brukt ved første brolegging
y^2 = totalt antall brosteiner brukt

$x^2 + 100 = y^2$
$x^2 + 10^2 = y^2$
Dette er et Pytagoreisk talltrippel, x = 24 og y = 26 tilfredsstiller likningen.)

Først la han 24^2=576 stein, da han var helt ferdig hadde han lagt $26^2 = 676$ belegningssteiner.

Oppgave 8:

Arealet (A) av det originale rektangelet var $A = lb$, hvor l og b står for lengde og bredde. Når lengden i det nye arealet øker med 50% betyr det av den har økt fra l til $\frac{3}{2}l$. Da kan vi sette opp et nytt uttrykk for arealet, nemlig $A = \frac{3}{2}l \cdot xb$, hvor x sier hvor stor del av bredden vi kan bruke for at arealet skal være det samme som det var i utgangspunktet. Vi kan sette opp at $\frac{3}{2}l \cdot xb = lb$ og ut fra dette får vi at $x = \frac{2}{3}$ (av den opprinnelige bredden). Det betyr at bredden har minsket med $\frac{1}{3}$, som er det samme som 33,3%.

Oppgave 9

x^2+x er størst

Vi vet at $0 < x < 1$, og ut fra det kan vi si at $x^2+x > x^2 > x^3 > x^4$ og også at $x^2+x > x^2+x^3 = x(x+x^2)$.