matematikk.org

OPPGAVER FRA ABELS HJØRNE I DAGBLADET

SETT 29

DAG 1

1. Per er i butikken for å kjøpe frukt. En appelsin koster 3 kroner, en banan koster 2 kroner, og et eple koster 1 krone. Per skal kjøpe for nøyaktig 10 kroner. På hvor mange måter kan han gjøre dette?

   A)8 B) 10 C) 14 D) 20 E) 36

2. Sidekantene i en terning økes med 20%. Hvor mye øker terningens volum?

   A) 20 % B) 44 % C) 56,2 % D) 60 % E) 72,8 %

Løsninger:

1. *C*. La oss liste opp mulighetene. Per kan kjøpe 3 appelsiner og 1 eple. Han kan kjøpe 2 appelsiner, enten 2, 1 eller 0 bananer, og resten epler. Han kan kjøpe 1 appelsin, enten 3, 2, 1 eller 0 bananer, og resten epler. Eller han kan la være å kjøpe appelsiner, men kjøpe enten 5, 4, 3, 2, 1 eller 0 bananer, og resten epler. Til sammen blir dette $1 + 3 + 4 + 6 = 14$ muligheter.

2. *E*. Vi kan anta at sidekanten i terningen er 1 cm, og at volumet dermed er $1\text{ cm} \cdot 1\text{ cm} \cdot 1\text{ cm} = 1\text{ cm}^3$. Hvis vi øker sidekantene til 1,2 cm, så blir volumet $1{,}2\text{ cm} \cdot 1{,}2\text{ cm} \cdot 1{,}2\text{ cm} = 1{,}728\text{ cm}^3$, og dette tilsvarer en økning på 72,8 %.

DAG 2

1. Hva er radius i den største kulen som får plass i en rektangulær eske med mål $20\text{ cm} \cdot 30\text{ cm} \cdot 40\text{ cm}$?

   A) 9 cm B) 10 cm C) 13,33 cm D) 15 cm E) 20 cm

2. Ingrid skal ringe til en venninne, men husker ikke helt de tre siste sifrene i telefonnummeret. Hun husker at det er to like sifre blant de tre siste, men at ikke alle tre er like. Hun husker også at tallet 6 forekommer blant de tre siste sifrene. Ingrid bestemmer seg for å prøve alle mulighetene en etter en. Hvor mange telefonnumre kan hun komme til å ringe før hun får snakke med venninnen sin?

   A)6 B) 18 C) 54 D) 99 E) 216

Løsninger:

1. *B*. En kule med radius 10 cm har diameter 20 cm, og vil akkurat få plass i esken.

2. *C*. Det er altså to forskjellige sifre som forekommer blant de tre siste. La oss kalle dem 6 og x. Det er 6 mulige rekkefølger: *66x, 6x6, x66, 6xx, x6x* og *xx6*. I tillegg er det 9 forskjellige muligheter for sifferet x (0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 eller 9). Til sammen er det dermed $9 \cdot 6 = 54$ telefonnumre som Ingrid kan komme til å måtte prøve.

DAG 3

1. Hvis tre menn kan male fire hus på fem dager, hvor mange hus kan da en mann male på 30 dager?

   A)2 B) 5 C) 8 D) 12 E) 72

2. Bjørn og Cecilie har nettopp giftet seg. Da Bjørn var 16 år, var Cecilie halvparten så gammel som hun er nå. Da Cecilie var 13 år, var Bjørn halvparten så gammel som han er nå. Hvor gammel er Cecilie?

   A) 26 år B) 28 år C) 29 år D) 30 år E) 32 år

Løsninger:

1. *C*. Hvis de tre mennene fortsatte å jobbe, ville de på $6 \cdot 5 = 30$ dager malt $6 \cdot 4 = 24$ hus. En mann vil dermed male $\frac{24}{3} = 8$ hus på 30 dager.

2. *B*. La oss anta at Cecilie er x år. Da Cecilie var 13 år, dvs. for $x - 13$ år siden, var Bjørn halvparten av sin nåværende alder. Dvs. Bjørn er nå $2x - 26$ år. Men da Bjørn var 16 år, dvs. for $2x - 26 - 16 = 2x - 42$ år siden, så var Cecilie halvparten så gammel som nå. Dermed er Cecilie $4x - 84$ år. Vi får likningen $x = 4x - 84$ som gir at $x = 28$. Altså er Cecilie 28 år og Bjørn $2x - 26 = 56 - 26 = 30$ år.

DAG 4

1. Onkel Skrue har 12 mynter i lommen. Det er bare kronestykker, femmere og tiere. Til sammen er det 50 kroner. Hvor mange femmere har Onkel Skrue i lommen?

   A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2. Hvis du gjør ett kast med 5 terninger, omtrent hvor stor er sannsynligheten for å få stor straight, det vil si at terningene viser 2, 3, 4, 5 og 6?

   A) 0,1 % B) 0,3 % C) 0,7 % D) 1,5 % E) 3,1 %

Løsninger:

1. *C*. Antall kronestykker må være et tall som er delelig med 5. Null kronestykker er ikke mulig, siden de 12 myntene da vil bli minst $5 \cdot 12 = 60$ kroner til sammen. 10 kronestykker er heller ikke mulig, siden de resterende to myntene ikke kan være 40 kroner. Altså må Onkel Skrue ha 5 kronestykker i lommen. De øvrige 7 myntene er femmere og tiere, og skal disse gi til sammen 45 kroner, må det være 2 tiere og 5 femmere.

2. *D*. Sannsynligheten endres ikke om vi kaster en terning av gangen. Den første terningen har da en sannsynlighet på $\frac{5}{6}$ på å vise enten 2, 3, 4, 5 eller 6. Den andre terningen har $\frac{4}{6}$ sjanse for å vise ett av de fire gjenværende tallene. Tilsvarende har de neste terningene $\frac{3}{6}, \frac{2}{6}$ og $\frac{1}{6}$ sjanse for å vise ett av de gjenværende av tallene 2, 3, 4, 5 og 6. Sannsynligheten for å kaste stor straight er dermed $\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{648} \approx 1{,}5\%$.

DAG 5

1. En butikk setter opp prisen på en stor flaske brus. Prisen uten pant går opp med 25%, mens prisen med pant går opp med 20%. Panten er på 2,50 kroner, og er den samme både før og etter prisoppgangen. Hva blir den nye utsalgsprisen inkludert pant?

   A) 10 kr   B) 12 kr   C) 12,50 kr   D) 15 kr   E) 18 kr

2. De første primtallene er 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 og 19. Legg merke til at differansen mellom påfølgende primtall her er enten 1, 2 eller 4. Når er første gang differansen mellom to påfølgende primtall er 6? Når er differansen første gang mer enn 6?

Løsninger:

1. *D*. Før prisoppgangen kostet brusen 10 kroner + pant, og etterpå 12,50 kroner + pant. For å komme fram til dette kan vi anta at opprinnelig pris var x kroner + pant. Den nye prisen inkludert pant kan da uttrykkes både som $1{,}25x + 2{,}50$ og $1{,}2(x + 2{,}50)$. Dette gir likningen $1{,}25x + 2{,}50 = 1{,}2(x + 2{,}50)$, som kan skrives om til $0{,}05x = 0{,}50$. Dermed er $x = \frac{0{,}50}{0{,}05} = 10$, og den nye utsalgsprisen er $1{,}25 \cdot 10 + 2{,}50 = 15$ kroner.

2. De neste primtallene etter 19 er 23 og 29, så dette er første eksempel der differansen er 6. Første gang differansen er mer enn 6, er mellom primtallene 89 og 97. (Det er ikke så vanskelig å se at differansen mellom to påfølgende primtall kan bli så stor man bare vil. For eksempel så er det ingen primtall mellom $1000! + 1$ og $1000! + 1001$, der $1000! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1000$.)

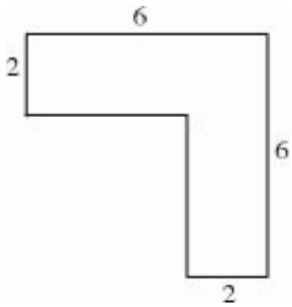
DAG 6

1. Jon sitter på hytta og venter på at foreldrene skal komme og spille kort. Som tidsfordriv tar han tilfeldig ut halvparten av kortene i en vanlig kortstokk, og studerer fargesammensetningen. Av de 26 kortene er det like mange spar som hjerter, og det er 50% flere kløver enn spar. Ruterknekten og ruterdamen er ikke med blant de 26 kortene. Hvor mange ruter er med?

A) 0 B) 2 C) 5 D) 11 E) 12

2. Hvor langt er det lengste linjestykket man kan få plass til inne i denne figuren?

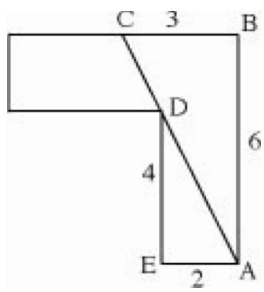
A) 6 B) 6,66 C) 7 D) $4\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{5}$



Løsninger:

1. C. Siden det er 50% flere kløver enn spar, må antall spar være et partall (0, 2, 4, 6, ...). Hvis antall spar er $2x$, så er det $2x$ hjerter og $3x$ kløver med blant de 26 kortene. $7x$ av kortene er altså ikke ruter, og dermed er det $26 - 7x$ ruter. Dette betyr at det er enten 26, 19, 12 eller 5 ruter blant de 26 kortene. Siden det til sammen er 13 ruter i en kortstokk og to av ruterne ikke er blant de 26, så er 5 ruter eneste mulighet.

2. E. Det lengste linjestykket kan plasseres for eksempel som vist under. Siden trekant ABC er formlik trekant DEA, så er BC halvparten så lang som AB. Altså er $BC = 3$. Lengden av AC finner vi nå ved Pythagoras: $AC^3 = 3^2 + 6^2 = 45$. Dermed er $AC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.



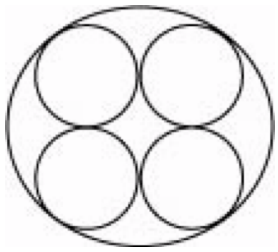
DAG 7

1. Hvor mange av tallene 89, 133, 501, 1000 og 12345 er delelige med 3?

   A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2. Hvis diameteren i de små sirklene er 1, hva er da diameter i den store sirkelen?

   A) 2,4 B) 2,5 C) $\pi - 1$ D) $\frac{\pi}{2} - 1$ E) $\sqrt{2} + 1$



1. veien. Hvordan kan du geometrisk finne den korteste veien?

Løsninger:

1. A. Tenk deg at du kaster den ene terningen først. Uansett utfallet av dette kastet, er det nøyaktig tre av sidene på den andre terningen som gjør at summen blir et partall. Sannsynligheten for at summen blir et partall, er dermed $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2. La punktet C være speilingen av B om linjen L. Det å gå fra A til B via L, er like langt som å gå fra A til C via L. Men den korteste veien fra A til C er langs en rett linje. For å komme raskest fra A til B, må du altså først gå i retning C inntil du treffer L, og deretter skal du gå rett til B.