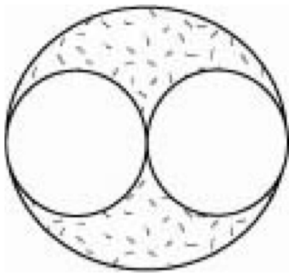
matematikk.org

OPPGAVER FRA ABELS HJØRNE I DAGBLADET

SETT 27

DAG 1

1. På figuren er de to små sirklene like store. Hva er forholdet mellom arealene av det skraverte og det ikke-skraverte området?



A) 1:1 B) 1:2 C) 3:4 D) $3:\pi$ E) $\pi:3$

2. Arne og Britt kaster kron og mynt annenhver gang. Vinneren er den som først får mynt. Hvis Arne begynner, hva er da sannsynligheten for at Britt vinner?

A) 25 % B) 30 % C) 33 % D) 36 % E) 42,5 %

Løsninger:

1. A. Hvis radius i den store sirkelen er r, så er radius i de små sirklene $\frac{r}{2}$. Arealet av den store sirkelen er πr^2, mens arealet av de små sirklene til sammen er $2\pi(\frac{r}{2})^2 = \pi(\frac{r}{2})^2$. Det skraverte området får dermed areal $\pi r^2 - \pi\frac{r^2}{2} = \pi\frac{r^2}{2}$, og det søkte forholdet blir 1:1.

2. C. Anta at Britt vinner med sannsynlighet x. Hvis Arne kaster mynt i første kast, så har han vunnet. Dette skjer med 50% sannsynlighet. Hvis han kaster kron, så er det Britt sin tur. Arne er nå i samme situasjon som Britt var opprinnelig, og han vil nå vinne med sannsynlighet x. Sannsynligheten for at Arne vinner, er i utgangspunktet altså $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x$. Siden sannsynligheten for at Britt vinner er x, må vi ha at $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x+x=1$. Dette gir $\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}$, og dermed $x=\frac{1}{3}=33\%$.

DAG 2

1. To positive tall står i forholdet *7:3*. Differensen mellom tallene er 24. Hva er det største av de to tallene?

A) 21 B) 28 C) 35 D) 42 E) 56

2. Jørgen hadde bursdagsselskap og fikk åtte flasker rødvin og to flasker hvitvin i gave. Uka etter skulle Jørgen på båttur med noen venner, og han tok med seg tre av flaskene uten å vurdere innholdet. Med cirka hvor stor sannsynlighet kunne Jørgen servere hvitvin på båtturen?

   A) 33,3 % B) 41,7 % C) 46,6% D) 53,3 % E) 60 %

Løsninger:

1. D. Vi kan anta at de to tallene er $7x$ og $3x$. Dersom differensen $7x - 3x = 4x$ skal være 24, må $x = 6$. De to tallene er dermed 42 og 18.

2. D. La oss regne ut sannsynligheten for at det ikke blir noe hvitvin. Tenk deg at flaskene trekkes tilfeldig en etter en. Den første flasken har $\frac{8}{10}$ sjanse for å være rødvin. I så fall har den andre flasken $\frac{7}{9}$ sjanse for å være rødvin, og den tredje $\frac{6}{8}$ sjanse. Sannsynligheten for å bare få med rødvin er dermed $\frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{7}{15}$. Sannsynligheten for å få med minst en flaske hvitvin blir dermed $\frac{8}{15} \approx 53{,}3\%$.

DAG 3

1. En klasse med 29 elever ble delt i to grupper. I den ene gruppen var det 3 flere jenter enn gutter, og i den andre gruppen var det 2 flere jenter enn gutter. Hvor mange jenter var det i klassen?

   A) 12 B) 16 C) 17 D) 19 E) 20

2. Hvis du har fem terninger, hva er sannsynligheten for å få yatzy (5 like) i ett kast?

   A) $\frac{1}{30}$ B) $\frac{1}{1024}$ C) $\frac{1}{1296}$ D) $\frac{1}{3125}$ E) $\frac{1}{7776}$

Løsninger:

1. C. Totalt i klassen er det altså 5 flere jenter enn gutter. Det må dermed ha vært 17 jenter og 12 gutter i klassen.

2. C. Tenk deg at terningene kastes en etter en. La oss si at den første terningen viser x øyne. For å få yatzy, må den andre terningen også vise x øyne. Sannsynligheten for det er $\frac{1}{6}$. Tilsvarende er det $\frac{1}{6}$ sjanse for at den tredje terningen viser x øyne, og det samme gjelder den fjerde og den femte terningen. Sannsynligheten for å få yatzy er dermed $(\frac{1}{6})^4 = \frac{1}{1296}$.

DAG 4

1. Erlend venter på bussen og kaster kron og mynt med 20-kroningen han har tenkt å betale med. Han kaster mynten høyt opp, så den snurrer mange ganger rundt, og lander på bakken rett foran benken der han sitter. De ti første kastene ga dette utfallet: kron, mynt, kron, mynt, kron, mynt, kron, mynt, kron, mynt. Erlend kaster mynten en gang til. Omtrent hvor stor er sannsynligheten for at han nå får kron?

   A) 50 % B) 60 % C) 75 % D) 90 % E) 99,9 %

2. Fotballagene A, B og C skal prøve ut et nytt poengsystem. Det skal gis 10 poeng for seier, 5 poeng for uavgjort og 0 poeng for tap. I tillegg skal hvert lag få ett poeng for hvert mål de scorer. Etter at to kamper har blitt spilt, så har A fått 8 poeng, B 14 poeng og C 9 poeng. Hva er resultatene i de to kampene som har blitt spilt?

Løsninger:

1. A. Når du kaster en vanlig mynt, så er det omtrent like sannsynlig å få den ene siden opp som den andre. Mynten husker ikke resultatet av de foregående kastene, og det har derfor ingen betydning at det har blitt annenhver kron/mynt i de ti forrige kastene.

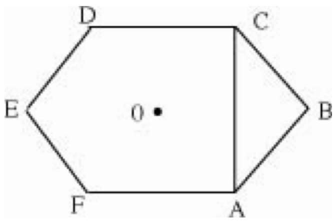
2. Legg merke til at lagene til sammen har $8 + 14 + 9 = 31$ poeng. Siden dette er på to kamper, må lagene til sammen ha scoret 11 mål. (20 poeng har blitt gitt utenom målpoengene). Det kan ikke ha vært to uavgjorte kamper, siden dette ville resultert i et partall antall mål. Det kan heller ikke ha vært to kamper med vinnere, siden da måtte enten ett lag ha minst 20 poeng, eller to lag ha minst 10 poeng. Altså må det ha vært en kamp som har blitt vunnet av et lag, og en uavgjort kamp. Det vinnende laget må opplagt ha vært B, siden det er det eneste med over 10 poeng. B kan ikke ha deltatt i den uavgjorte kampen, siden det da ville hatt over 15 poeng. Altså må A og C ha spilt uavgjort. Siden C har ett poeng mer enn A, må C ha vært involvert i kampen mot B. Dermed må resultatene i de to kampene ha vært: (A – C): (3 – 3); (B – C): (4 – 1).

DAG 5

1. På en skole med 300 elever er en femtedel av elevene over 1,58 meter høye, og en sjettedel er over 1,60. Hvor mange elever er mellom 1,58 og 1,60 meter høye?

   A) 6 B) 10 C) 12 D) 24 E) 30

2. Figuren viser en regulær sekskant, dvs. en sekskant der alle sidene er like lange, og alle vinklene er like store. Hvis sidelengden i sekskanten er 1, hvor langt er da linjestykket AC?



A) 1,5 B) 1,75 C) 2 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

Løsninger:

1. B. En femtedel av 300 er 60, og en sjettedel av 300 er 50. Det er dermed $60 - 50 = 10$ elever som er mellom 1,58 og 1,60 meter høye.

2. E. La O være sentrum i sekskanten. Da kan sekskanten deles opp i 6 likesidete trekanter, OAB, OBC, OCD osv. Avstanden fra A til D er dermed 2. Siden trekanten ACD er rettvinklet, får vi ved Pythagoras at $AC^2 + 1^2 = 2^2$. Det følger at $AC = \sqrt{3}$.

DAG 6

1. Ti ektepar var på en fest. Det var innleid et danseband, som skulle spille nok låter til at hver mann fikk en dans med hver av damene. Hvor mange låter måtte dansebandet spille?

   A) 9 B) 10 C) 90 D) 100 E) 362880

2. Tenk deg at du har et kvadrat med sidelengde 20 cm. Du tar med deg dette kvadratet ut på gata, og ber en tilfeldig forbipasserende sette fem små kryss hvor som helst inne i kvadratet. Det viser seg at uansett hvordan disse kryssene er satt, så er det mulig å velge ut to kryss slik at avstanden mellom de to kryssene er mindre enn 14,2 cm. Kan du forklare hvorfor det må være slik?

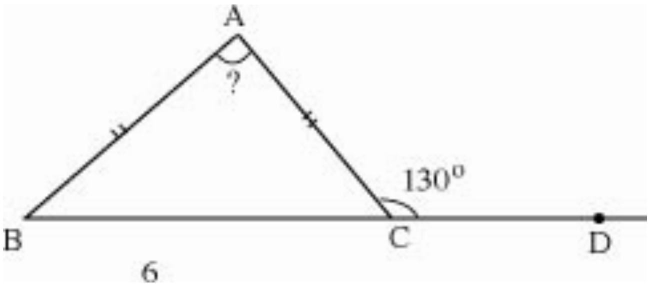
Løsninger:

1. B. Hver mann skal danse med 10 damer. Det er nok med 10 låter, dersom alle er på dansegulvet hele tiden, og de bytter på dansepartner mellom hver dans.

2. Tenk deg kvadratet inndelt i fire mindre kvadrater med sidelengde 10 cm. Siden det er fem kryss, og bare fire små kvadrater, så må det finnes et slikt kvadrat som inneholder (minst) to kryss. Avstanden mellom to motstående hjørner i dette kvadratet er $10\sqrt{2} < 14{,}2\ cm$, så avstanden mellom de to kryssene inne i kvadratet er dermed også nødt til å være mindre enn 14,2 cm.

DAG 7

1. På figuren er $AB = AC$ og vinkel ACD er 130°. Hvor stor er vinkel A?



A) 60° B) 70° C) 75° D) 80° E) 90°

2. På en hylle i et antikvariat er det 31 bøker til salgs. De er ordnet slik at når to bøker står ved siden av hverandre, så koster den til høyre 5 kroner mer enn den til venstre. Boken som står lengst til høyre, koster like mye som den midterste boken og en av dens nabobøker til sammen. Hvor mye koster den dyreste boken?

A) 145 kr B) 155 kr C) 160 kr D) 230 kr E) 305 kr

Løsninger:

1. D. $\angle BCA = 180^{\circ} - 130^{\circ} = 50^{\circ}$. Siden trekanten ABC er likebent, er vinkel ABC også 50°. Vinkel A finner vi nå ved at summen av vinklene i trekanten er 180°: $\angle A = 180^{\circ} - 50^{\circ} - 50^{\circ} = 80^{\circ}$.

2. B. La oss anta at den billigste boken koster x kroner. Da koster den midterste (bok nr. 16 fra venstre) $x + 15 \cdot 5 = x + 75$ kroner, og den dyreste (bok nr. 31) koster $x + 150$ kroner. En nabobok til den midterste boken koster enten $x + 75 + 5$ eller $x + 75 - 5$ kroner. Den midterste og en nabobok koster dermed til sammen $2x + 150 \pm 5$ kroner. Siden dette også er prisen på den dyreste boken, får vi $2x + 150 \pm 5 = x + 150$, som gir $x = \pm 5$. Negative priser finner man ikke i butikker, så derfor er $x = 5$, og prisen på den dyreste boken er $x + 150 = 155$ kroner.